

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Vorlesungen: 24.10.2005 und 31.10.2005</b>	
<b>Vektor Rechnung: 1. Teil</b>	<b>4</b>
1.1 Definition und Darstellung eines Vektors . . . . .	4
1.2 Rechnen mit Vektoren . . . . .	5
1.2.1 Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	5
1.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren . . . . .	5
1.2.3 Betrag eines Vektors . . . . .	5
1.2.4 Beispiel: Kräftegleichgewicht . . . . .	6
1.2.5 Linearkombination von Vektoren . . . . .	6
1.3 Das Skalarprodukt . . . . .	6
1.3.1 Definition des Skalarprodukts . . . . .	6
1.3.2 Sonderfälle . . . . .	6
1.3.3 Rechenregeln . . . . .	7
1.3.4 Wichtige Eigenschaften . . . . .	7
1.3.5 Orthogonal, Orthonormal . . . . .	7
1.3.6 Projektion, Komponente . . . . .	7
1.4 Das Vektorprodukt . . . . .	8
1.4.1 Definition des Vektorproduktes . . . . .	8
1.4.2 Rechenregeln . . . . .	8
1.4.3 Wichtige Eigenschaften . . . . .	8
1.4.4 Das Spatprodukt . . . . .	9
1.4.5 Determinanten-Berechnung des Vektorproduktes . . . . .	9
1.5 Gerade und Ebene im Raum . . . . .	10
1.5.1 Definition Gerade im Raum . . . . .	10
1.5.2 Schnittpunkt zwischen zwei Geraden . . . . .	10
1.5.3 Definition Ebene im Raum . . . . .	11
1.5.4 Koordinatendarstellung der Ebene . . . . .	11
1.5.5 Hesse'sche Orthonormalform . . . . .	11
1.5.6 Schnitt zweier Ebenen . . . . .	11
<b>2 Vektor Rechnung 2. Teil</b>	
<b>Koordinatensysteme</b>	<b>12</b>
2.1 Linearkombination von Vektoren . . . . .	13
2.2 Kartesische Koordinaten . . . . .	13
2.2.1 Orthogonal, Orthonormal . . . . .	13
2.2.2 Projektion, Komponente . . . . .	14
2.2.3 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren . . . . .	14
2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten . . . . .	15
2.3.1 Kugelkoordinaten . . . . .	15
2.3.2 Zylinderkoordinaten . . . . .	16
<b>3 Vorlesungen: 7.11. 2005 und 14.11. 2005</b>	
<b>Vektor-Rechnung 3. Teil</b>	<b>17</b>
3.1 Vektorwertige Funktionen – Vektoranalysis . . . . .	17
3.2 Skalarfeld, Vektorfeld . . . . .	17
3.3 Differentiation eines Skalarfeldes: Gradient . . . . .	18
3.4 Differentiation eines Vektorfeldes: Divergenz und Rotation . . . . .	19
<b>4 Vorlesung: 21.11. 2005</b>	
<b>Matrix und Determinante</b>	<b>21</b>
4.1 Matrix und Determinante . . . . .	21
4.1.1 Lösbarkeit von Gleichungssystemen: . . . . .	21
4.1.2 Rang der Matrix . . . . .	21
4.1.3 Besondere Matrizen . . . . .	22
4.1.4 Transponierte Matrix . . . . .	22
4.1.5 Rechenoperationen mit Matrizen . . . . .	22
4.2 Lösen von Gleichungssystemen	
Gauß'sche Eliminationsverfahren . . . . .	22

4.3	Die Determinante einer Matrix . . . . .	23
4.3.1	Determinante einer (2,2) Matrix . . . . .	23
4.3.2	Determinante einer (3,3) Matrix Regel von Sarrus . . . . .	23
4.3.3	Rechenregeln für Determinanten . . . . .	23
4.3.4	Lösen von Gleichungssystemen mit Hilfe von Determinanten . . . . .	24
4.3.5	Determinanten von Matrizen höherer Ordnung Laplace'scher Entwicklungssatz . . . . .	24
4.4	Produkt von Matrizen . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Vorlesungen: 5.12. 2005 – 19.12. 2005</b>	
	<b>Differentialrechnung und Integralrechnung</b>	<b>26</b>
5.1	Differentialrechnung . . . . .	26
5.1.1	Definition der Ableitung . . . . .	26
5.1.2	Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0$ . . . . .	26
5.1.3	Die zweite Ableitung . . . . .	26
5.1.4	Kurvendiskussion . . . . .	26
5.1.5	Ableitung elementarer Funktionen . . . . .	27
5.1.6	Differentiationsregeln: . . . . .	28
5.2	Integralrechnung . . . . .	28
5.2.1	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	28
5.2.2	Grundintegrale . . . . .	29
5.2.3	Integrations-Regeln . . . . .	29
5.2.4	Partielle Integration . . . . .	29
5.2.5	Integration durch Substitution . . . . .	29
5.2.6	Integrand der Form $f'(x)/f(x)$ . . . . .	29
5.3	Mehrdimensionale Integrale . . . . .	30
5.3.1	Gebietsintegrale . . . . .	30
5.3.2	Volumenintegrale . . . . .	31
5.4	Differentialrechnung und Integralrechnung Anwendungsbeispiele aus der Physik . . . . .	34
5.4.1	Körper unter äußerer Spannung . . . . .	34
5.4.2	Viskosität von Flüssigkeiten . . . . .	36
5.4.3	Das Gravitationsgesetz . . . . .	40
<b>6</b>	<b>Vorlesung: 9.1. 2006</b>	
	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>44</b>
6.1	Zahlentheorie . . . . .	44
6.2	Darstellung einer komplexen Zahl . . . . .	44
6.3	Komplexe Zahlen: Darstellung in Polarkoordinaten . . . . .	45
6.4	Euler'sche Formel . . . . .	46
6.5	Rechenregeln . . . . .	47
6.6	Potenz einer komplexen Zahl: Formel von Moivre . . . . .	47
6.7	Anwendungsbeispiel aus der Physik: Die Kreisbewegung . . . . .	48
<b>7</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>49</b>
7.1	Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	49
7.1.1	Allgemeine Bemerkungen zu Differentialgleichungen . . . . .	49
7.1.2	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit getrennten Variablen	49
7.1.3	Lösung der homogenen DGL: . . . . .	50
7.1.4	Lösung der inhomogenen DGL: (Variation der Konstanten) . . . . .	51
7.1.5	Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Veränderlichen . . . . .	53
<b>7</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>54</b>
7.2	Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	54
7.2.1	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung . . . . .	54
7.2.2	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffi- zienten: Lösung der homogenen DGL . . . . .	55
7.2.3	Beispiel: Die gedämpfte Schwingung . . . . .	56

<b>7</b>	<b>Differentialgleichungen</b>	<b>59</b>
7.3	Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung	
	Beispiel: Erzwungene Schwingung . . . . .	59
7.4	Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	
	Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL . . . . .	62
	7.4.1 Lösen der homogenen DGL 2. Ordnung: $f(x) = 0$ . . . . .	62
	7.4.2 Wronski'sche Determinante . . . . .	63
	7.4.3 Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung: Variation der Konstanten	63
7.5	Näherungsweise Lösung durch Potenzreihenentwicklung . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Vorlesung: 6. 2. 2006</b>	
	<b>Potentialreihen–Zerlegung: Die Taylor'sche Reihe</b>	<b>69</b>
8.1	Die Taylorentwicklung . . . . .	69
8.2	Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen . . . . .	70
8.3	Beispiel aus der Festkörperphysik	
	Wechselwirkung zwischen zwei Atomen . . . . .	71
<b>9</b>	<b>Vorlesung: 13. 2. 2005</b>	
	<b>Auswertung von Messungen – Fehlerrechnung</b>	<b>73</b>
9.1	systematische Messabweichungen . . . . .	73
9.2	statistische Messabweichungen . . . . .	73
	9.2.1 arithmetischer Mittelwert . . . . .	73
	9.2.2 Streuung der Messwerte um den Mittelwert . . . . .	74
	9.2.3 Standardabweichung des Mittelwertes . . . . .	74
	9.2.4 Gaußsche Normalverteilung . . . . .	74
	9.2.5 Halbwertsbreite . . . . .	75
	9.2.6 Zur Standardabweichung: . . . . .	76
9.3	Fehlerfortpflanzung . . . . .	76
9.4	Lineare Regression . . . . .	77

# 1 Vorlesungen: 24.10.2005 und 31.10.2005

## Vektor Rechnung: 1. Teil

Einige in der Physik auftretende Messgrößen sind durch eine einzige Zahl bestimmt:

Temperatur	T	K
Dichte	$\rho$	kg/m <sup>3</sup>
Leistung	P	Watt = J/s = kg · m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>

Andere physikalische Messgrößen besitzen neben ihrer „Stärke“ (Betrag) auch eine Richtung. Sie lassen sich durch einen Richtungspfeil (**Vektor**) darstellen:

Kraft	$\vec{F}$	Newton; N = kg · m/s <sup>2</sup>
Geschwindigkeit	$\vec{v}$	m/s
Drehmoment	$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$	Newtonmeter = N · m

### 1.1 Definition und Darstellung eines Vektors

- Ein **Skalar** ist eine Zahl:  $c$
- Ein **Vektor**  $\vec{a}$  ist definiert durch:

- Länge (Betrag des Vektors)  $|\vec{a}|$
- Richtung  $\vec{e}_a = \vec{a}/|\vec{a}|$

<b>Vektor</b> $\vec{a} =  \vec{a}  \cdot \vec{e}_a$
---

Genauer: Richtung und Länge bestimmen einen Richtungspfeil. Ein Vektor ist die Klasse aller Richtungspfeile, d.h. der Vektor ist nicht auf einen einzigen Ort im Raum bezogen, sondern allgemein definiert (verschiebbar).

Besondere Vektoren sind:

- Einheitsvektor: besitzt die Länge **1**.
- Nullvektor:  $\vec{0} = (0,0,0)$

Der Raum sei durch ein rechtwinkliges Koordinatensystem definiert. Ein Vektor, dessen Anfangspunkt im Ursprung des Koordinatensystems liegt (Nullvektor  $\vec{0}$ ), heißt Ortsvektor  $\vec{A}$ . Dieser Ortsvektor repräsentiert den Vektor  $\vec{a} = \overline{OA}$ . In der Mechanik werden „Kraftvektoren“ einem spezifischen Anfangspunkt zugeordnet und sind somit Ortsvektoren.

Der Vektor lässt sich durch die Angabe der Koordinaten beschreiben. Dies geschieht in Zeilen- oder Spaltenform:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= (a_1, a_2, a_3) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \\ &= a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3 = \sum_i a_i \cdot \vec{e}_i \end{aligned} \quad (1)$$

Bei dieser Darstellung müssen die Einheitsvektoren des Koordinatensystems vorgegeben sein. Im einfachsten Fall eines rechtwinkligen Koordinatensystems lauten die Einheitsvektoren:  $\vec{e}_1 = (0,0,1)$ ;  $\vec{e}_2 = (0,1,0)$  und  $\vec{e}_3 = (1,0,0)$ .

## 1.2 Rechnen mit Vektoren

### 1.2.1 Multiplikation mit einem Skalar

Ist  $\vec{a}$  ein Vektor und ist  $c \in \mathbb{R}$ , so ist  $c \cdot \vec{a}$  der Vektor, der die  $|c|$ -fache Länge des Vektors  $\vec{a}$  hat (Streckung oder Stauchung). Er deutet in dieselbe Richtung, falls  $c > 0$  und in die entgegengesetzte Richtung, falls  $c < 0$ , d.h. er ist in Richtung  $-\vec{a}$  invertiert.

$$c \cdot \vec{a} = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \\ c \cdot a_3 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$(c + d) \cdot \vec{a} = c \cdot \vec{a} + d \cdot \vec{a} \quad (3)$$

$$c \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = c \cdot \vec{a} + c \cdot \vec{b} \quad (4)$$

### 1.2.2 Addition und Subtraktion von Vektoren

Die Addition bzw. Subtraktion von Vektoren erfolgt koordinatenweise. Der Betrag des resultierenden Vektors kann auch über den Cosinus des Zwischenwinkels der beiden Ausgangsvektoren bestimmt werden.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

Die Subtraktion von Vektoren kann man auch verstehen als die Addition des Gegenvektors  $-\vec{b}$ .

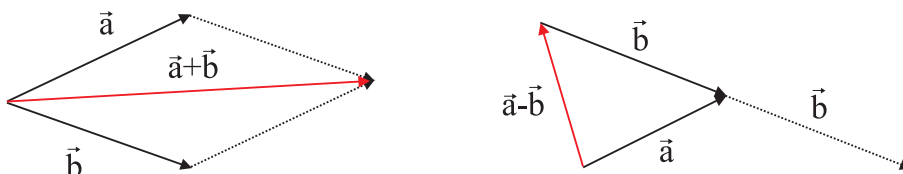


Abbildung 1.1: Addition und Subtraktion von Vektoren

### 1.2.3 Betrag eines Vektors

Der Betrag eines Vektors ist seine Länge:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (7)$$

Für den Betrag eines Vektors gelten folgende Rechenregeln:

$$|\vec{a}| = |-\vec{a}| \quad (8)$$

$$|c \cdot \vec{a}| = |c| \cdot |\vec{a}| \quad (9)$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad \text{Dreiecksungleichung} \quad (10)$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{b} - \vec{a}| \quad \text{Abstand der Endpunkte} \quad (11)$$

### 1.2.4 Beispiel: Kräftegleichgewicht

Falls mehrere Kräfte auf einen Körper einwirken, liegt dann Kräftegleichgewicht vor, wenn:

$$\sum_i \vec{a}_i = \vec{0} \quad (12)$$

d.h. der Körper befindet sich in Ruhe oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.

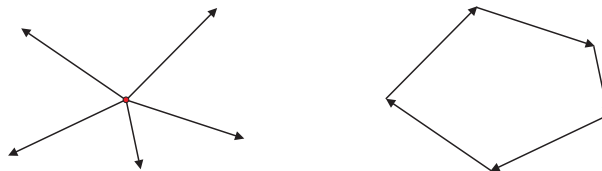


Abbildung 1.2: Kräftegleichgewicht

### 1.2.5 Linearkombination von Vektoren

Linearkombination

$$\vec{x} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + \dots + c_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i^n c_i \cdot \vec{a}_i \quad (13)$$

Die Vektoren  $\vec{a}_1 \dots \vec{a}_n$  heißen **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor nur trivial ( $c_i = 0$ ) als Linearkombination darstellen lässt. Linear unabhängige Vektoren spannen den Raum auf. Sie bilden eine mögliche **Basis des Raums**.

Sind zwei Vektoren linear abhängig, so besitzen sie dieselbe Richtung, d.h. sie sind **kollinear**.

Sind drei Vektoren linear abhängig, so liegen sie auf einer Ebene, d.h. sie sind **komplanar**.

Mehr als drei Vektoren in einem dreidimensionalen Raum sind stets **linear abhängig**.

## 1.3 Das Skalarprodukt

### 1.3.1 Definition des Skalarprodukts

Das Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist eine Zahl (skalar):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi \quad (14)$$

wobei  $\varphi$  der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren ist.

### 1.3.2 Sonderfälle

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

Einer der beiden Vektoren ist der Nullvektor, oder die beiden Vektoren stehen aufeinander senkrecht:  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , d.h.  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

Die beiden Vektoren sind kollinear:  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , d.h.  $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$ .

### 1.3.3 Rechenregeln

$$\text{Kommutativgesetz} \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (15)$$

$$(r\vec{a}) \cdot \vec{b} = r(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (r\vec{b}) \quad (16)$$

$$\text{Distributivgesetz} \quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (17)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \geq 0 \quad (18)$$

$$\text{Achtung!} \quad (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \quad (19)$$

### 1.3.4 Wichtige Eigenschaften

$$\text{Winkel zwischen } \vec{a} \text{ und } \vec{b} \quad \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (20)$$

$$\text{Cauchy – Schwarzsche Ungleichung} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad (21)$$

$$\text{Dreiecksungleichung} \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (22)$$

### 1.3.5 Orthogonal, Orthonormal

- Zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren nennt man auch **orthogonal**.
- Sind diese außerdem normiert, d.h. Einheitsvektoren  $\vec{n}_0 = \vec{n}/|\vec{n}|$ , so nennt man sie **orthonormal**.

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0 \quad \text{falls } i \neq j \quad \text{d.h.} \quad \vec{e}_i \perp \vec{e}_j \quad \text{orthogonal}$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1 \quad \text{falls } i = j \quad \text{d.h.} \quad |\vec{e}_i| = |\vec{e}_j| = 1 \quad \text{normiert}$$

#### Kronecker-Delta:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases} \quad (23)$$

Beispiel: Herleitung der Formel für den Betrag eines Vektors:

$$\begin{aligned} |\vec{a}|^2 &= \vec{a} \cdot \vec{a} = \left( \sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \left( \sum_i a_i \vec{e}_i \right) = \sum_i \sum_j (a_i \cdot \vec{e}_i) \cdot (a_j \cdot \vec{e}_j) \\ &= \sum_i \sum_j a_i a_j \cdot \vec{e}_i \vec{e}_j = \sum_i \sum_j a_i a_j \cdot \delta_{i,j} = \sum_i a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \end{aligned} \quad (24)$$

### 1.3.6 Projektion, Komponente

Die Projektion eines Vektors  $\vec{b}$  auf einen anderen Vektor  $\vec{a}$ , bzw. dessen Richtung, ist der Vektor mit der Richtung von  $\vec{a}$ , der durch den Fußpunkt des Lotes vom Endpunkt von  $\vec{b}$  aus begrenzt wird.

Die senkrechte **Projektion** des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$  lautet:

$$\begin{aligned} \vec{b}_{\vec{a}} &= |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{a}_0 \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a} = (\vec{e}_{\vec{a}} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{e}_{\vec{a}} \end{aligned} \quad (25)$$

Die Zahl  $|\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} / a^2$  heißt Komponente des Vektors  $\vec{b}$  in Richtung  $\vec{a}$ .

## 1.4 Das Vektorprodukt

### 1.4.1 Definition des Vektorproduktes

Das Vektorprodukt zwischen zwei Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  ist ein Vektor:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_c \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi \quad (26)$$

- $\varphi$  ist der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren.
- Der resultierende Vektor  $\vec{c}$  steht senkrecht auf  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .
- $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{a} \times \vec{b}$  bilden in dieser Reihenfolge ein Rechtssystem.
- Sind die beiden Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  linear abhängig (kollinear), so ist das Vektorprodukt Null.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \implies \vec{a} \parallel \vec{b}$$

- Die Länge des Vektorprodukts  $\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi$  ist die Fläche des von  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  aufgespannten Parallelogramms.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \quad (27)$$

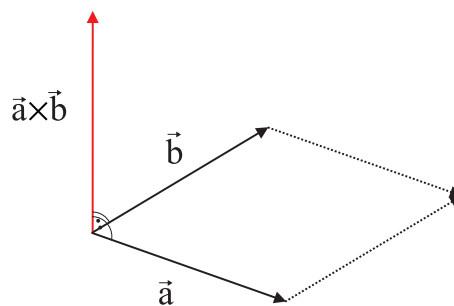


Abbildung 1.3: Darstellung des Vektorproduktes

### 1.4.2 Rechenregeln

$$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a}) \quad (28)$$

$$r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b}) \quad (29)$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \quad (30)$$

### 1.4.3 Wichtige Eigenschaften

Entwicklungssatz  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$  (31)  
 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}$

Grassmann – Identität  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$  (32)

Lagrange – Identität  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$  (33)

$$(\vec{a} \times \vec{b})^2 = \vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \quad (34)$$

Achtung!  $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$



#### 1.4.4 Das Spatprodukt

Das Spatprodukt ist definiert als:

$$\begin{aligned} V &= (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \\ &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} \\ &= (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \end{aligned} \quad (35)$$

Das Spatprodukt ist das Volumen des von den drei Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , und  $\vec{c}$  aufgespannten Parallelepipeds.

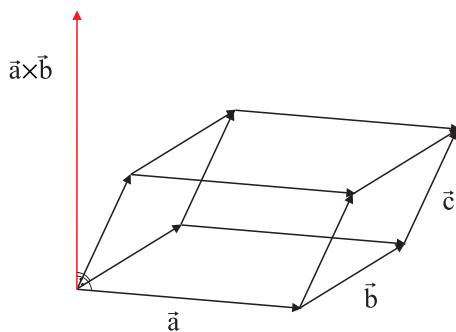


Abbildung 1.4: Volumen eines Parallelepipeds: das Spatprodukt

Vektorprodukt aus zwei Vektorprodukten

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) &= \langle \vec{a}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \cdot \vec{b} - \langle \vec{b}, \vec{c}, \vec{d} \rangle \cdot \vec{a} = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{d} \rangle \cdot \vec{c} - \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{d} \\ (\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c}) &= \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle \cdot \vec{b} \end{aligned} \quad (36)$$

#### 1.4.5 Determinanten-Berechnung des Vektorproduktes

Das Vektorprodukt kann auch mit Hilfe einer symbolischen Determinanten berechnet werden. Die erste Spalte bilden hier die Einheitsvektoren des Koordinatensystems. Das Vektorprodukt erhält man, indem man die Determinante nach der ersten Spalte entwickelt.

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & a_1 & b_1 \\ \vec{e}_2 & a_2 & b_2 \\ \vec{e}_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \\ &= \vec{e}_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{e}_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{e}_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= \vec{e}_1(a_2b_3 - a_3b_2) + \vec{e}_2(a_3b_1 - a_1b_3) + \vec{e}_3(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1) \end{aligned} \quad (37)$$

Wichtige Anwendungsbeispiele in der Physik sind:  
Bahngeschwindigkeit, Drehmoment, Lorentzkraft.

## 1.5 Gerade und Ebene im Raum

### 1.5.1 Definition Gerade im Raum

Ist  $\vec{b}$  ein Vektor ( $\neq \vec{0}$ ) und  $t$  ist eine reelle Zahl, so liegen alle Endpunkte des Vektors  $t \cdot \vec{b}$  auf der Geraden, die durch die Richtung von  $\vec{b}$  bestimmt wird. Diese Gerade verläuft durch den Ursprung des Koordinatensystems.

Die Gleichung für eine allgemeine Gerade ( $G$ ), die durch den Aufpunkt  $\vec{a}$  verläuft, lautet in der Parameterdarstellung:

$$G: \vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{b}, \quad t \in \mathbb{R} \quad (38)$$

Zwei Geraden sind parallel (im Sonderfall sogar identisch), wenn die beiden Richtungsvektoren  $\vec{b}_1$  und  $\vec{b}_2$  linear abhängig sind, d.h.  $\vec{b}_1 = \lambda \vec{b}_2$  mit  $\lambda \neq 0$ .

Eine Gerade ist die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten  $P_1$  und  $P_2$ :

$$G: \vec{x} = \vec{P}_1 + t \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1), \quad t \in \mathbb{R} \quad (39)$$

### 1.5.2 Schnittpunkt zwischen zwei Geraden

Den Schnittpunkt zwischen zwei Geraden erhält man durch Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen:

$$G_1: \vec{x} = \vec{a}_1 + r \cdot \vec{b}_1, \quad r \in \mathbb{R} \quad (40)$$

$$G_2: \vec{x} = \vec{a}_2 + s \cdot \vec{b}_2, \quad s \in \mathbb{R} \quad (41)$$

Für zwei Geraden im zweidimensionalen Raum ergeben sich folgende Möglichkeiten:

- Die beiden Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
- Die beiden Geraden schneiden sich nicht, d.h. sie verlaufen parallel.
- Die beiden Geraden sind identisch.

In den letzten beiden Fällen sind die Richtungsvektoren voneinander linear abhängig, d.h. kollinear.

Wenn sich zwei Geraden im dreidimensionalen Raum nicht schneiden, so verlaufen sie entweder parallel, sind identisch, oder verlaufen zueinander „windschief“.

Der Schnittwinkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden lässt sich wie folgt angeben:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2|}{|\vec{b}_1| |\vec{b}_2|} \quad (42)$$

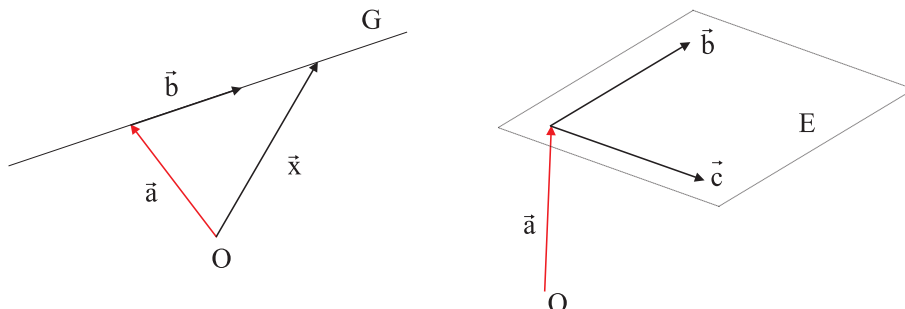


Abbildung 1.5: Darstellung einer Gerade und einer Ebene im Raum.

### 1.5.3 Definition Ebene im Raum

Eine Ebene lässt sich in der Parameterdarstellung durch einen Aufpunkt  $\vec{a}$  und zwei voneinander linear unabhängige Richtungsvektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ ,

$$E: \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}, \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (43)$$

oder durch drei Punkte  $P_1, P_2, P_3$ , die nicht auf einer Geraden liegen, beschreiben:

$$E: \vec{x} = \vec{P}_1 + r \cdot (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) + s \cdot (\vec{P}_3 - \vec{P}_1), \quad r, s \in \mathbb{R} \quad (44)$$

### 1.5.4 Koordinatendarstellung der Ebene

In der Koordinatendarstellung lässt sich eine Ebene wie folgt aufstellen:

$$E: \begin{aligned} ax + by + cz &= d \\ \vec{n} \cdot \vec{x} &= d \end{aligned} \quad (45)$$

Hierbei ist  $\vec{n} = (a, b, c)$  der Normalenvektor der Ebene, d.h. der Vektor, der auf der Ebene senkrecht steht ( $\vec{n} \perp \vec{b}$  und  $\vec{n} \perp \vec{c}$ ):

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c} \quad (46)$$

### 1.5.5 Hesse'sche Orthonormalform

Die Ebenengleichung in der Hesse'schen Normalform lautet:

$$E: \vec{n}_0 \cdot \vec{x} = d \quad (47)$$

- $d$  ist der Abstand der Ebene vom Ursprung des Koordinatensystems.
- $\vec{n}_0$  ist der Normaleneinheitsvektor von  $E$  und zeigt vom Ursprung zu  $E$  hin.

$$\vec{n}_0 = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{|\vec{b} \times \vec{c}|} \quad (48)$$

### 1.5.6 Schnitt zweier Ebenen

Zwei Ebenen verlaufen entweder zueinander parallel (im Sonderfall, identische Ebenen) oder sie schneiden sich in einer Geraden (Schnittgeraden). Im Fall von parallelen Ebenen sind ihre Normalvektoren voneinander linear abhängig, d.h.  $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$ .

Der Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen kann wie folgt berechnet werden:

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} \quad (49)$$

Zur Berechnung der Schnittgeraden ist es am einfachsten, wenn beide Ebenen in der Koordinatendarstellung gegeben sind.

Der Richtungsvektor der Schnittgeraden ist das Vektorprodukt der beiden Normalenvektoren der Ebenen:  $\vec{g} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ .

## 2 Vektor Rechnung 2. Teil Koordinatensysteme

### Zusammenfassung der wichtigsten Vektor-Rechenregeln

- Ein **Skalar** ist eine Zahl:  $c$
- Ein **Vektor**  $\vec{a}$  ist definiert durch:
  - Länge (Betrag des Vektors)  $|\vec{a}|$
  - Richtung  $\vec{e}_{\vec{a}} = \vec{a}/|\vec{a}|$

<b>Vektor</b> $\vec{a} =  \vec{a}  \cdot \vec{e}_{\vec{a}}$
---

Genauer: Richtung und Länge bestimmen einen Richtungspfeil. Ein Vektor ist die Klasse aller Richtungspfeile, d.h. der Vektor ist nicht auf einen einzigen Ort im Raum bezogen, sondern allgemein definiert (verschiebbar).

Vektor-Addition, Vektor-Subtraktion und die Multiplikation mit einem Skalar erfolgen komponentenweise.

#### Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \quad (50)$$

#### Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{e}_{\perp(\vec{a}, \vec{b})} \cdot |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \sphericalangle (\vec{a}, \vec{b}) \quad (51)$$

#### Wichtige Eigenschaften:

$$\text{Dreiecksungleichung} \quad |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}| \quad (52)$$

$$\text{Cauchy – Schwarzsche Ungleichung} \quad |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad (53)$$

$$\text{Spatprodukt} \quad V = \langle \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \rangle = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \quad (54)$$

#### Rechenregeln:

	Skalarprodukt	Kreuzprodukt
Kommutativgesetz	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$	$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
Assoziativgesetz	$r(\vec{a} \cdot \vec{b}) =$ $= (r\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (r\vec{b})$	$r \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) =$ $= (r \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (r \cdot \vec{b})$
Distributivgesetz	$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) =$ $= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) =$ $= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$
Achtung!	$(\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} \neq \vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$	$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

## 2.1 Linearkombination von Vektoren

Linearkombination

$$\vec{x} = c_1 \cdot \vec{a}_1 + \cdots + c_n \cdot \vec{a}_n = \sum_i^n c_i \cdot \vec{a}_i \quad (55)$$

Die Vektoren  $\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n$  heißen **linear unabhängig**, wenn sich der Nullvektor nur trivial ( $c_i = 0$ ) als Linearkombination darstellen lässt. Linear unabhängige Vektoren spannen den Raum auf. Sie bilden eine mögliche **Basis des Raums**.

Sind zwei Vektoren linear abhängig, so besitzen sie dieselbe Richtung, d.h. sie sind **kollinear**.

Sind drei Vektoren linear abhängig, so liegen sie auf einer Ebene, d.h. sie sind **komplanar**.

Generell gilt,  $n$  allgemeine, linear unabhängige Vektoren spannen einen  $N$ -dimensionalen Raum auf. Aufgrund der einfacheren Handhabung verwendet man im Allgemeinen orthogonale und normierte Basisvektoren:

## 2.2 Kartesische Koordinaten

Im allgemeinen Fall spannen beliebige, linear unabhängige Vektoren den Raum auf. Zur besseren Darstellung ist es jedoch hilfreich, geeignete Koordinatenvektoren zu wählen. Im Fall der kartesischen Koordinaten stehen die Koordinatenvektoren jeweils aufeinander senkrecht (orthogonal) und besitzen alle die Länge Eins (normiert).

### 2.2.1 Orthogonal, Orthonormal

- Zwei aufeinander senkrecht stehende Vektoren nennt man auch **orthogonal**.
- Sind diese außerdem normiert, d.h. Einheitsvektoren  $\vec{n}_0 = \vec{n}/|\vec{n}|$ , so nennt man sie **orthonormal**.

$$\begin{aligned} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= 0 \quad \text{falls } i \neq j \quad \text{d.h.} \quad \vec{e}_i \perp \vec{e}_j && \text{orthogonal} \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j &= 1 \quad \text{falls } i = j \quad \text{d.h.} \quad |\vec{e}_i| = |\vec{e}_j| = 1 && \text{normiert} \end{aligned}$$

**Kronecker-Delta:**

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{falls } i = j \end{cases} \quad (56)$$

### 2.2.2 Projektion, Komponente

Die Projektion eines Vektors  $\vec{b}$  auf einen anderen Vektor  $\vec{a}$ , bzw. dessen Richtung, ist der Vektor mit der Richtung von  $\vec{a}$ , der durch den Fußpunkt des Lotes vom Endpunkt von  $\vec{b}$  aus begrenzt wird.

Die senkrechte **Projektion** des Vektors  $\vec{b}$  auf den Vektor  $\vec{a}$  lautet:

$$\begin{aligned}\vec{b}_{\vec{a}} &= |\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{a}_0 \\ &= \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \cdot \vec{a} \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{a^2} \cdot \vec{a} = (\vec{e}_{\vec{a}} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{e}_{\vec{a}}\end{aligned}\tag{57}$$

Die Zahl  $|\vec{b}| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b} / a^2$  heißt Komponente des Vektors  $\vec{b}$  in Richtung  $\vec{a}$ .

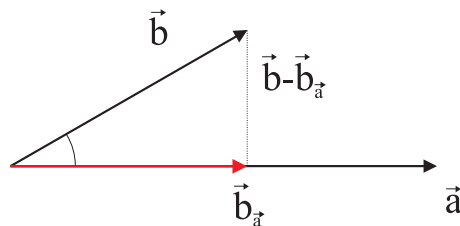


Abbildung 2.1.: Projektion eines Vektors

### 2.2.3 Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren

Drei allgemeine linear unabhängige Vektoren  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$  und  $\vec{a}_3$  spannen einen dreidimensionalen Raum auf, d.h. sie bilden die Basis des Raums. Mit Hilfe der Vektor-Projektion lässt sich schrittweise eine orthogonale, bzw. orthonormale Basis des Raums bestimmen. Hierzu beginnt man mit dem ersten Vektor  $\vec{a}_1$  als Ausgangsvektor. Alle weiteren orthonormalen Basis-Vektoren  $\vec{b}_i$  sind die entsprechenden Projektionen auf die jeweilige Senkrechte. Im letzten Arbeitsschritt werden die resultierenden Basisvektoren normiert:  $\vec{b}_1 / |\vec{b}_1|$ .

Dieses Verfahren nennt man auch: Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.

$$\vec{b}_1 = \vec{a}_1\tag{58}$$

$$\vec{b}_2 = \vec{a}_2 - \frac{\vec{a}_2 \cdot \vec{b}_1}{b_1^2} \cdot \vec{b}_1\tag{59}$$

$$\vec{b}_3 = \vec{a}_3 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_1}{b_1^2} \cdot \vec{b}_1 - \frac{\vec{a}_3 \cdot \vec{b}_2}{b_2^2} \cdot \vec{b}_2\tag{60}$$

Allgemein gilt:

$$\vec{b}_{l+1} = \vec{a}_{l+1} - \frac{\vec{a}_{l+1} \cdot \vec{b}_1}{b_1^2} \cdot \vec{b}_1 - \dots - \frac{\vec{a}_{l+1} \cdot \vec{b}_l}{b_l^2} \cdot \vec{b}_l\tag{61}$$

Aus der **Orthogonalbasis**:  $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$

erhält man durch Normieren die

**Orthonormalbasis**:  $(\frac{\vec{b}_1}{|\vec{b}_1|}, \frac{\vec{b}_2}{|\vec{b}_2|}, \frac{\vec{b}_3}{|\vec{b}_3|})$ .

## 2.3 Zylinder- und Kugelkoordinaten

### 2.3.1 Kugelkoordinaten

Je nach Problem kann es sich als zweckmäßig erweisen, einen beliebigen Raumpunkt nicht in kartesischen Koordinaten sondern in Kugelkoordinaten darzustellen. Zur Bestimmung des Punktes benötigt man:

- den Abstand  $r \geq 0$  des Punktes  $P$  vom Ursprung des Koordinatensystems  $O$ ,
- den Winkel  $\varphi$ , den die Projektion der Geraden  $\overline{OP}$  auf die  $x,y$ -Ebene ( $\overline{OP'}$ ) mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt. Für  $\varphi$  gilt:  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .
- den Winkel  $\theta$ , den die Gerade  $\overline{OP}$  mit der  $x,y$ -Ebene einschließt. Für  $\theta$  gilt:  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .

Als Beispiel sei hier die Positionsbestimmung auf der Erde nach Längen und Breitengraden genannt (Position von Stuttgart: Breite:  $48^{\circ} 46' 36''$  **Nord**, Länge:  $9^{\circ} 10' 48''$  **Ost**)

Die Werte  $(r, \varphi, \theta)$  heißen **Kugelkoordinaten** des Punktes  $P$ . Sie entsprechen den Polarkoordinaten in der Ebene und werden deshalb auch räumliche Polarkoordinaten genannt. Liegt  $P$  im Ursprung, so ist nur  $r = 0$  eindeutig bestimmt,  $\varphi$  und  $\theta$  sind beliebig.

#### Umrechnung zwischen rechtwinkligen und Kugelkoordinaten:

Aus Abbildung 2.2 ergeben sich die Beziehungen:

$$\begin{aligned}x &= |\overline{OP'}| \cdot \cos \varphi \\y &= |\overline{OP'}| \cdot \sin \varphi \\|\overline{OP'}| &= r \cdot \cos \theta\end{aligned}$$

Die rechtwinkligen Koordinaten eines Raumpunktes lassen sich danach aus den Kugelkoordinaten wie folgt berechnen:

$$x = r \cdot \cos \theta \cdot \cos \varphi \quad (62)$$

$$y = r \cdot \cos \theta \cdot \sin \varphi \quad (63)$$

$$z = r \cdot \sin \theta \quad (64)$$

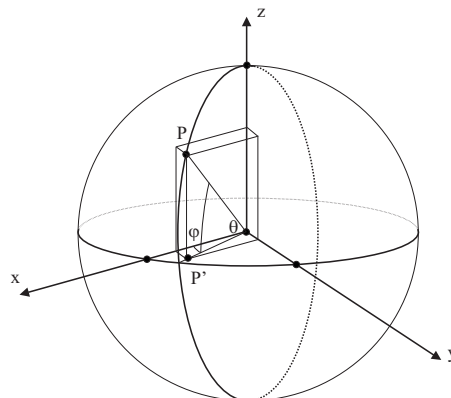


Abbildung 2.2.: Kugelkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $\theta$  eines Raumpunktes  $P$ .

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + z^2 &= r^2 \\
x/\sqrt{x^2 + y^2} &= \cos \varphi & z/\sqrt{x^2 + y^2} &= \sin \theta / \cos \theta = \tan \theta \\
y/\sqrt{x^2 + y^2} &= \sin \varphi & y/x &= \sin \varphi / \cos \varphi = \tan \varphi
\end{aligned}$$

Dannach ergeben sich die Kugelkoordinaten eines Raumpunktes aus den rechtwinkligen Koordinaten wie folgt:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (65)$$

$$\tan \theta = z/\sqrt{x^2 + y^2} \quad (66)$$

$$\tan \varphi = y/x \quad (67)$$

### 2.3.2 Zylinderkoordinaten

Bei Rotationen um eine starre Achse oder Problemen auf der Oberfläche eines Zylinders ist die Einführung von Zylinderkoordinaten sehr hilfreich. Ausgehend von den Polarkoordinaten lässt sich ein beliebiger Punkt  $P$  durch folgende Parameter bestimmen:

- den Abstand  $r \geq 0$  des Aufpunktes  $P'$  vom Ursprung  $O$ , d.h.  $r$  ist der Abstand von der Zylinderachse.
- den Winkel  $\varphi$ , den die Gerade  $\overline{OP'}$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).
- den orientierten Abstand  $z$  des Punktes  $P$  von der  $x, y$ -Ebene ( $-\infty < z < \infty$ ) (Zylinderhöhe).

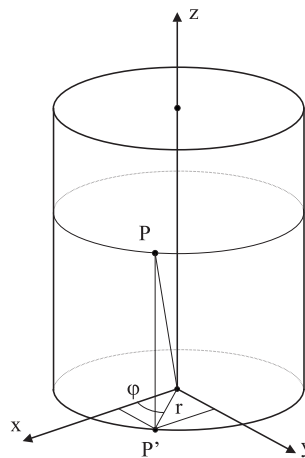


Abbildung 2.3.: Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$ , und  $z$  eines Raumpunktes  $P$ .

$$x = r \cdot \cos \varphi \quad (68)$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \quad (69)$$

$$z = z \quad (70)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (71)$$

$$\cos \varphi = x/\sqrt{x^2 + y^2} \quad (72)$$

$$\sin \varphi = y/\sqrt{x^2 + y^2} \quad (73)$$

$$z = z \quad (73)$$



### 3 Vorlesungen: 7.11. 2005 und 14.11. 2005

## Vektor–Rechnung 3. Teil

### 3.1 Vektorwertige Funktionen – Vektoranalysis

Darstellung: Kurve in einer Ebene, Fläche im Raum

explizite (kartesische) Darstellung	$y = f(x),$	$a \leq x \leq b$
implizite (kartesische) Darstellung	$F(x, y) = 0$	
Polarkoordinatendarstellung	$r = r(\varphi),$	$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$
Parameterdarstellung	$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$t_0 \leq t \leq t_1$

### 3.2 Skalarfeld, Vektorfeld

In der Vektoranalysis fasst man Vektoren als Funktionen von Veränderlichen auf und wendet die Methoden der Differential– und Integralrechnung an.

- **Skalarfeld**

Eine skalare Funktion des Raumes  $f(x, y, z)$  nennt man ein Skalarfeld, wenn durch sie jedem Punkt  $P(x, y, z)$ , bzw. jedem Ortsvektor  $\vec{x}$  ein Skalar  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$  zugeordnet wird.

Beispiele sind: Temperaturverteilung, Druckverteilung (Wetterkarte), inhomogene Dichte eines Körpers, Potential, Höhenunterschiede im Gebirge.

Die Flächen oder Linien mit  $f(x, y, z) = \text{const.}$  heißen Niveaulinien bzw. Äquipotentialflächen (Höhenlinien, Isotherme, Isobare, ...). Die Funktion  $f(x, y, z)$  ändert sich umso schneller, je dichter die Niveaulinien liegen.

- **Vektorfeld**

Wird durch die Funktion  $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$  jedem Raumpunkt ein Vektor  $\vec{v}$  zugeordnet, so heißt diese Funktion: Vektorfeld.

Beispiele sind: Strömungsfelder, Kraftfelder, elektrisches Feld, magnetisches Feld, Windangabe auf der Wetterkarte, ...

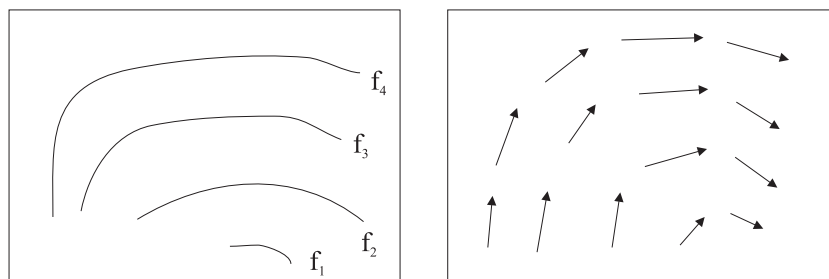


Abbildung 3.1: Skalarfeld (links) und Vektorfeld (rechts).

### 3.3 Differentiation eines Skalarfeldes: Gradient

Die Differentiation erfolgt komponentenweise, **partielle Differentiation** (Partial =  $\partial$ ). Es gelten die üblichen Rechenregeln für Vektoren.

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \quad (74)$$

#### Gradient:

Die Änderung  $df(x, y, z)$ , welche die Funktion beim Fortschreiten um  $d\vec{r} = dx + dy + dz$  erfährt, ist:

$$\text{grad}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (75)$$

Für die Änderung  $df(x, y, z)$  in eine beliebige Richtung  $d\vec{r}$  erhält man  $df = \text{grad}f \cdot d\vec{r}$ . Wählt man die Richtung  $d\vec{r}$  so, dass man sich auf einer Niveaulfläche bewegt ( $f(x, y, z) = \text{const.}$ ), so ist  $df(x, y, z) = 0$ .

$$df = \text{grad}f \cdot d\vec{r} = 0 \quad (76)$$

Laut den Regeln für das Vektorprodukt gilt:

Der Gradient von  $f(x, y, z)$  steht senkrecht auf der entsprechenden Niveaulfläche von  $f(x, y, z)$ . Ferner zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs und ist umso größer, je dichter die benachbarten Niveaulflächen (Höhenlinien) liegen.

Die Ableitung eines Skalarfeldes (Gradienten von  $f(x, y, z)$ ) ergibt ein Vektorfeld.

Ein Vektorfeld ist jedoch nicht zwingend der Gradient eines Skalarfeldes. Falls dies doch der Fall ist, so spricht man von einem konservativen Vektorfeld, bzw. von einem Potentialfeld. Das zugehörige Skalarfeld ist das Potential.

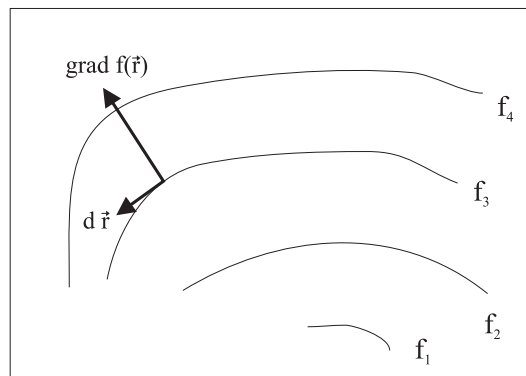


Abbildung 3.2: Niveaulflächen und Gradient.

### Richtungsableitung:

Die Richtungsableitung ist die Ableitung eines Skalarfeldes in eine bestimmte Richtung im Raum (entlang des Vektors  $\vec{a}$ ). Diese Ableitung schließt mit dem Gradienten einen bestimmten Winkel  $\varphi$  ein. Somit gilt für die Richtungsableitung:

$$df(x, y, z) = \text{grad}f \cdot d\vec{a} = |\text{grad}f| \cdot |d\vec{a}| \cos\varphi \quad (77)$$

Die Ableitung von  $f(x, y, z)$  an der Stelle  $\vec{x}_0$  in eine beliebige Richtung entspricht der Projektion des Gradienten von  $f$  auf den Vektor  $\vec{a}$ .

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \text{grad}f(\vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (78)$$

Das Ergebnis der Richtungsableitung ist eine Zahl (Skalar). Sie gibt die Steigung (das Gefälle) vom Ort  $\vec{x}_0$  aus in Richtung  $\vec{a}$  an.

## 3.4 Differentiation eines Vektorfeldes: Divergenz und Rotation

(Ausblick auf das Sommersemester: Elektrodynamik!)

### Der Nabla-Operator

Der Nabla-Operator  $\nabla$  ist wie folgt definiert:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (79)$$

Ein Operator (Funktional) „wirkt“ auf eine Funktion.

### Divergenz

Die Divergenz ist die Ableitung eines Vektorfeldes. Als Ergebnis erhält man ein Skalarfeld:

$$\text{div } \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (80)$$

Anschaulich:

Ein Vektorfeld ist z.B. ein Strömungsfeld. Somit beschreibt die Ableitung (Divergenz) des Vektorfeldes die Änderung in der Strömung.

Man denke sich die Strömung einer Flüssigkeit durch einen offenen Kasten. Bei einem beidseitig offenen Kasten fließt genauso viel Flüssigkeit in den Kasten als aus ihm heraus. In diesem Fall ist  $\text{div } \vec{v} = 0$ .

**div  $\vec{v} > 0$**  Fließt mehr Flüssigkeit aus ihm heraus als in ihn hinein, so handelt es sich um eine **Quelle**.

**div  $\vec{v} < 0$**  Im umgekehrten Fall ist der Kasten eine **Senke**.

## Rotation

Die Rotation ist eine Differentialoperation, bei der ein Vektorfeld einem anderen Vektorfeld zugeordnet wird:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (81)$$

Zur anschaulichen Darstellung kann man die Strömung in einem Fluß betrachten. Hält man ein Schaufelrad in die Strömung, so wird es sich entweder rechts- oder links herum drehen. Die Rotation  $\operatorname{rot} \vec{v}$  beschreibt die Drehung des Schaufelrades:

- $\operatorname{rot} \vec{v}$  zeigt in Richtung des Drehvektors (Achse des Schaufelrades),
- $|\operatorname{rot} \vec{v}|$  ist ein Maß für die Drehgeschwindigkeit.

Für die Rechenregeln von *grad*, *div* und *rot*, d.h. dem Nabla-Operator, gelten im Allgemeinen die bekannten Vektorrechenregeln. Im Besonderen gilt:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} f = \nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (82)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} f = \nabla \cdot (\nabla \times f) = 0 \quad (83)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \nabla \nabla f = \Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad (84)$$

In der oben dargestellte zweifache Ableitung ( $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$ ) ist  $\Delta$  der **Laplace-Operator**.

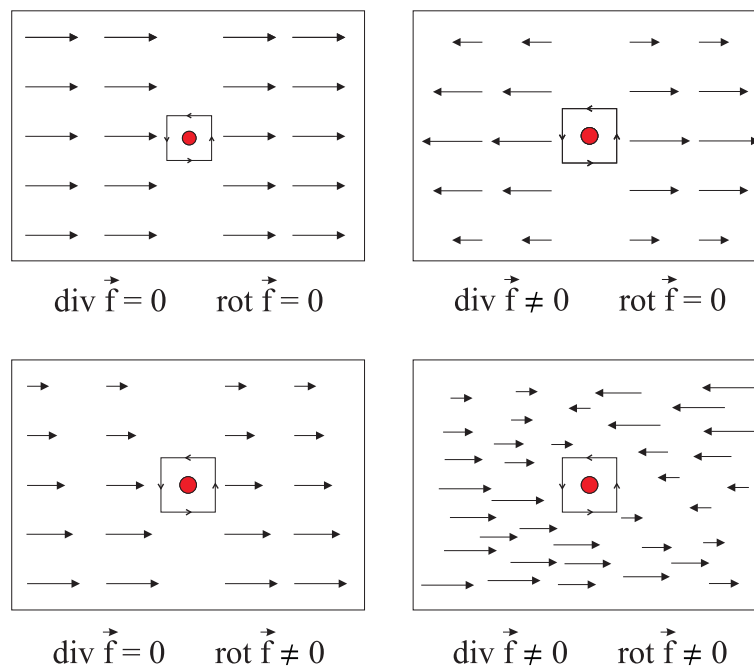


Abbildung 3.3: Divergenz und Rotation eines Vektorfelds.

## 4 Vorlesung: 21.11. 2005

### Matrix und Determinante

#### 4.1 Matrix und Determinante

Zur Lösung von  $m$  Gleichungen mit  $n$  Unbekannten kann man alle Parameter der Gleichungen in einem rechteckigen Zahlenschema, einer Matrix, anordnen. So werden folgende Gleichungen

$$\begin{array}{cccc} a_{11}x_1 + & \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + & \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{array} \quad (85)$$

auch wie folgt darstellt:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \quad (86)$$

wobei:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (87)$$

Die in der Matrix  $A$  stehenden Zahlen sind die Elemente  $(a_{i,j})$  der Matrix. Der Typ  $(m,n)$  der Matrix beschreibt somit die Zahl ihrer Zeilen ( $m$ ) und Spalten ( $n$ ). Ist  $m = n$ , so ist die Matrix quadratisch.

##### 4.1.1 Lösbarkeit von Gleichungssystemen:

- $m < n$ :** das Gleichungssystem ist unterbestimmt. Es gibt keine eindeutige Lösung.
- $m > n$ :** das Gleichungssystem ist überbestimmt. Es gibt nur dann eine eindeutige Lösung, wenn  $m-n$  Gleichungen voneinander linear abhängig sind.
- $m = n$ :** das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn alle Gleichungen voneinander linear unabhängig sind.

##### 4.1.2 Rang der Matrix

$R_m$  Maximalzahl der linear unabhängigen Zeilen

$R_n$  Maximalzahl der linear unabhängigen Spalten

$$rg(\mathbf{A}) = R_n = R_m$$

Die beiden Zahlen  $R_n$  und  $R_m$  stimmen bei jeder Matrix überein und werden als Rang der Matrix bezeichnet.

Der Vergleich des Rangs der Matrix mit der Dimension des Lösungsvektors zeigt direkt, ob das Gleichungssystem über- oder unterbestimmt oder exakt lösbar ist.

- $A\vec{x} = \vec{b}$  ist lösbar, wenn  $rg(A) = rg(A, \vec{b})$
- $A\vec{x} = \vec{b}$  ist eindeutig lösbar, wenn  $rg(A) = rg(A, \vec{b}) = n$ .
- $A\vec{x} = \vec{b}$  ist nicht lösbar, wenn  $rg(A) \neq rg(A, \vec{b})$ .

### 4.1.3 Besondere Matrizen

Nullmatrix: Alle Elemente der Matrix sind gleich 0.

Ein Vektor ist eine spezielle Form der Matrix. Bei ihm ist die Zahl der Spalten gleich 1.

$$\text{Einheitsmatrix: } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

### 4.1.4 Transponierte Matrix

Ist  $A = (a_{ij})$  eine  $(m,n)$ -Matrix, so ist die  $(n,m)$ -Matrix  $A^T = (a_{ji})$  die gespiegelte bzw. transponierte Matrix von  $A$ . Hierzu spiegelt man alle Elemente der Matrix an der Diagonalen.

### 4.1.5 Rechenoperationen mit Matrizen

Besitzen die beiden Matrizen  $A = (a_{ij})$  und  $B = (b_{ij})$  den gleichen Typ  $(m,n)$ , so gelten folgende Rechenregeln:

Gleichheit	$\mathbf{A} = \mathbf{B}$	falls	$a_{ij} = b_{ij}$	für alle $i$ und $j$
Multiplikation mit Skalar	$c \cdot \mathbf{A} = c \cdot (a_{ij}) = (c \cdot a_{ij})$			für alle $i$ und $j$
Addition	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = (a_{ij}) + (b_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$			für alle $i$ und $j$
Transponierte Matrix	$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$			
	$\mathbf{A}^{TT} = \mathbf{A}$			

## 4.2 Lösen von Gleichungssystemen Gauß'sche Eliminationsverfahren

Gegeben sei folgendes Gleichungssystem:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \tag{88}$$

Ziel ist, die Matrix  $(A, \vec{b})$  so umzuformen, dass die sogenannte Dreiecksform (im Idealfall Diagonalform) der Matrix vorliegt:

$$(\mathbf{A}, \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Bei der Umformung der Matrix sind folgende Rechenregeln erlaubt:

- Multiplikation einer Zeile (Gleichung) mit einem Faktor ( $r \neq 0$ ).
- Vertauschen zweier Zeilen.
- Vertauschen zweier Spalten (Umbenennen der Variablen!):
- Addition/Subtraktion des  $r$ -fachen einer Zeile mit dem  $s$ -fachen einer anderen Zeile.

### 4.3 Die Determinante einer Matrix

Jeder quadratischen Matrix läßt sich eine reelle Zahl zuordnen. Diese Zahl heißt Determinante und wird wie folgt bestimmt:

#### 4.3.1 Determinante einer (2,2) Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \quad (89)$$
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

#### 4.3.2 Determinante einer (3,3) Matrix Regel von Sarrus

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \quad (90)$$
$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} =$$
$$= +a_1 b_2 c_3 + b_1 c_2 a_3 + c_1 a_2 b_3$$
$$- a_3 b_2 c_1 - b_3 c_2 a_1 - c_3 a_2 b_1$$

Alle Elemente auf einer Diagonalen werden multipliziert und die Ergebnisse der drei Diagonalen addiert. Hierbei erhalten die nach unten verlaufenden Diagonalen ein positives und die nach oben verlaufenden Diagonalen ein negatives Vorzeichen.

Fasst man drei Vektoren zu einer Matrix zusammen:  $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3)$ , so entspricht die Determinante  $\det A = |\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{a}_3|$  dem orientierten Volumen, d.h. dem Spatprodukt des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds.

#### 4.3.3 Rechenregeln für Determinanten

- Das Vertauschen einer Zeile oder Spalte ändert das Vorzeichen der Determinante.
- Durch Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit einer Zahl  $a$  wird auch die Determinante mit einer Zahl multipliziert:  $a \cdot \det A$ .
- Die Addition/Subtraktion einer kompletten Zeile (Spalte) mit einer anderen Zeile (Spalte) ändert die Determinante nicht (Gauß'sches Verfahren!).

**det  $\mathbf{A} = 0$ ,** falls eine Zeile oder Spalte nur aus Nullen besteht bzw. eine Zeile (Spalte) die Linearkombination anderer Zeilen (Spalten) darstellt. In diesem Fall ist das Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar.

**det  $\mathbf{A} \neq 0$ :** Alle Zeilen (Spalten) sind voneinander linear unabhängig. Der Rang der Matrix entspricht der Dimension der Matrix. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar.

#### 4.3.4 Lösen von Gleichungssystemen mit Hilfe von Determinanten

Gleichungssysteme können auch mit Hilfe der Determinanten gelöst werden. Hierzu ersetzt man eine Spalte der Matrix mit dem Lösungsvektor  $\vec{b}$  und berechnet die entsprechende Determinante. Die Lösungen des Gleichungssystems ergeben sich wie folgt:

$$x_1 = \frac{|\vec{b} \vec{a}_2 \vec{a}_3|}{\det \mathbf{A}} \quad (91)$$

$$x_2 = \frac{|\vec{a}_1 \vec{b} \vec{a}_3|}{\det \mathbf{A}}$$

$$x_3 = \frac{|\vec{a}_1 \vec{a}_2 \vec{b}|}{\det \mathbf{A}} \quad (92)$$

$$(93)$$

#### 4.3.5 Determinanten von Matrizen höherer Ordnung Laplace'scher Entwicklungssatz

Zur Bestimmung von Determinanten höherer Ordnung kann man die Matrix mit Hilfe des Gauß'schen Verfahrens auf die Diagonalform bringen oder die Determinante nach einer Zeile oder Spalte entwickeln. Dieses Verfahren nennt man Laplace'sches Entwicklungsverfahren. Für die Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte gilt:

$$\begin{aligned} \det \mathbf{A} = \det(a_{ij}) &= \sum_{j=0}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (i\text{-te Zeile}) \\ &= \sum_{i=0}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij} \quad (j\text{-te Spalte}) \end{aligned} \quad (94)$$

Hierbei ist die Untermatrix  $A_{ij}$  die Matrix, die durch Streichen der  $i$ -ten Zeile bzw.  $j$ -ten Spalte aus  $A$  hervorgeht.

Die auftretenden Vorzeichen  $(-1)^{i+j}$  sind schachbrettartig verteilt:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

**Beispiel:**

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 0 \\ 0 & 1 & 2 & | & -2 \\ -1 & -1 & 3 & | & 2 \\ 1 & 1 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &\quad - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 0 - 2 \cdot (-2 + 6 - 3 + 3 - 3 + 4) \\ &\quad - 2 \cdot (2 + 4 - 3 - 2) + 0 = -12 \end{aligned}$$



## 4.4 Produkt von Matrizen

Ist  $A = (a_{ij})$  eine  $(m,n)$ -Matrix und  $B = (b_{jk})$  eine  $(n,r)$ -Matrix, so ist das Produkt eine Matrix mit dem Typ  $(m,r)$ .

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (c_{ik}) \quad (95)$$

mit:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk} \quad \text{für alle } i \text{ und } k. \quad (96)$$

$c_{ik}$  ist das Skalarprodukt der  $i$ -ten Zeile von  $A$  mit der  $k$ -ten Spalte von  $B$ .

Ferner müssen  $A$  und  $B$  zueinander passen, d.h. die Spaltenzahl  $j$  von  $A$  muss mit der Zeilenzahl  $j$  von  $B$  übereinstimmen.

Falls man das Produkt  $AB$  bilden kann, so existiert das das Produkt  $BA$  im Allgemeinen nicht.

Nur im Sonderfall von zwei quadratischen Matrizen lässt sich das Produkt  $BA$  bilden. Hier gilt jedoch  $AB \neq BA$ . Das Matrixprodukt ist nicht kommutativ.

**Beispiel:**

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+3+12 & 0-3+8 \\ 0-2+3 & 0+2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Rechenregeln für Matrizen:**

Kommutativgesetz	$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
Vorsicht!	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
Produktregel	$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$
Nullmatrix	$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$
Einheitsmatrix	$\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$
Distributivgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A}\mathbf{B} + \mathbf{A}\mathbf{C}$
Assoziativgesetz	$\mathbf{A} (\mathbf{B}\mathbf{C}) = (\mathbf{A}\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{C}$
Transponierte des Produkts	$(\mathbf{A}\mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
Inverse Matrix	$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$ $(\mathbf{A}\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$

## 5 Vorlesungen: 5.12. 2005 – 19.12. 2005

### Differentialrechnung und Integralrechnung

#### 5.1 Differentialrechnung

##### 5.1.1 Definition der Ableitung

Die Ableitung einer Funktion an der Stelle  $x_0$  ist wie folgt definiert:

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (97)$$

Sie entspricht der Steigung der Tangente an der Stelle  $x_0$ .

$$\begin{aligned} f'(x_0) > 0 &: \text{positive Steigung, Zunahmen} \\ f'(x_0) < 0 &: \text{negative Steigung, Abnahmen} \end{aligned}$$

##### 5.1.2 Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0$

Eine stetige Funktion ist differenzierbar, wenn für alle  $x_0 \in R$  gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = f'(x_0) \quad (98)$$

##### 5.1.3 Die zweite Ableitung

$$f''(x) = \frac{df'(x)}{dx} = \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \quad (99)$$

Die zweite Ableitung beschreibt die Krümmung einer Kurve:

$$\begin{aligned} f''(x) > 0 & \text{ linksgekrümmt} \\ f''(x) < 0 & \text{ rechtsgekrümmt} \end{aligned}$$

##### 5.1.4 Kurvendiskussion

$$f(x) = 0 \quad \text{Nullstelle}$$

$$\begin{array}{llll} f'(x) = 0 & \text{Extremwert} & \begin{array}{l} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{array} & \begin{array}{l} \text{falls } f''(x) < 0 \\ \text{falls } f''(x) > 0 \end{array} \\ & & \text{Wendepunkt} & \text{falls } f''(x) = 0 \end{array}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{Wendepunkt} \quad \text{falls } f'''(x) \neq 0$$

### 5.1.5 Ableitung elementarer Funktionen

#### Potenzfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n \\ f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \end{aligned} \quad (100)$$

Herleitung mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} a^i b^{n-i} \quad (101)$$

Die Ableitung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [(x+h)^n - x^n] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} x^{n-s} h^s = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} x^{n-s} h^{s-1} = \\ &= \binom{n}{1} x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} \end{aligned}$$

Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 & f'(x) &= 3x^2 \\ f(x) &= \sqrt{x} = x^{1/2} & f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ f(x) &= \frac{1}{x} = x^{-1} & f'(x) &= -\frac{1}{x^2} \\ f(x) &= \ln x & f'(x) &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

#### Exponentialfunktion

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x \\ f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (e^{x+h} - e^x) = e^x \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^x \end{aligned} \quad (102)$$

#### Trigonometrische Funktionen

Zur Herleitung der Ableitung werden folgende Formeln benötigt:

$$\begin{aligned} \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cdot \sin \frac{(\alpha - \beta)}{2} \\ \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} &= 1 \end{aligned}$$

Ableitung der Sinusfunktion:

$$\begin{aligned} \frac{d \sin x}{dx} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\sin(x+h) - \sin x] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2}{h} \cos \left( \frac{(2x+h)}{2} \right) \cdot \sin \left( \frac{h}{2} \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \cos \left( \frac{(2x+h)}{2} \right) \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h/2}{h/2}}_{=1} = \cos x \end{aligned} \quad (103)$$

### 5.1.6 Differentiationsregeln:

Sind  $u(x)$  und  $v(x)$  zwei stetige und überall differenzierbare Funktionen, so gilt:

Summenregel	$(u + v)'$	$=$	$u' + v'$
Konstanter Vorfaktor	$(r \cdot u)'$	$=$	$r \cdot u'$
Produktregel	$(u \cdot v)'$	$=$	$u'v + v'u$
Quotientenregel	$\left(\frac{u}{v}\right)'$	$=$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$
Kettenregel	$u(v(x))'$	$=$	$u'(v(x)) \cdot v'(x)$

## 5.2 Integralrechnung

### 5.2.1 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Jede Integralfunktion (Stammfunktion)  $F(x)$  einer stetigen Integrandenfunktion  $f(x)$  ist differenzierbar und ihre Ableitung ist gleich der Integrandenfunktion.

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \implies F'(x) = f(x) \quad (104)$$

### Unbestimmtes Integral

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad (105)$$

### Bestimmtes Integral

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (106)$$

Das bestimmte Integral gibt die Fläche unter der Kurve  $f(x)$  zwischen den Punkten  $a$  und  $b$  an.

### Uneigentliches Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) \quad (107)$$

### 5.2.2 Grundintegrale

$$\int x^n dx = \begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} & \text{falls } n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \ln x & \text{falls } n = -1 \end{cases} \quad (108)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C \quad (109)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C \quad (110)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C \quad (111)$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C \quad (112)$$

$$\int e^x dx = e^x + C \quad (113)$$

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + C \quad (114)$$

### 5.2.3 Integrations-Regeln

$$\int_a^b r \cdot f(x) dx = r \cdot \int_a^b f(x) dx \quad (115)$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (116)$$

$$\int_a^b f(x) + g(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (117)$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad (118)$$

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (119)$$

### 5.2.4 Partielle Integration

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx \quad (120)$$

### 5.2.5 Integration durch Substitution

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))g'(t) dt \quad (121)$$

### 5.2.6 Integrand der Form $f'(x)/f(x)$

$$\int_a^b \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C \quad (122)$$

## 5.3 Mehrdimensionale Integrale

Mit Hilfe des bestimmten Integrals läßt sich die Fläche eines ebenen Bereichs bestimmen. Für die Berechnung räumlicher Bereiche, d.h. Volumina, ist eine Verallgemeinerung der Integration möglich:

### 5.3.1 Gebietsintegrale

Die Fläche einer allgemeinen, d.h. gekrümmten Ebene im Raum lässt sich mit Hilfe des Doppelintegrals berechnen:

$$\text{Gebiet} = \iint_G f(x, y) dG \quad (123)$$

Das Doppelintegral wird durch zwei hintereinander durchgeführte Integrationen gelöst. Hierbei arbeitet man sich von 'innen' nach 'außen'. Die Reihenfolge des Abarbeitens der Integrale ist jedoch beliebig.

$$\iint_G dG = \int_{x=a_1}^{x=a_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_{y=b_1}^{y=b_2} \left( \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \right) dy \quad (124)$$

### Funktionaldeterminante

Beim Übergang von einem Koordinatensystem in ein anderes läßt sich ein mehrdimensionales Integral mit Hilfe der Funktionaldeterminante umbenennen. Dies sei am Beispiel der Polarkoordinaten verdeutlicht:

### Polarkoordinaten

Die Polarkoordinaten sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (125)$$

Funktionaldeterminante

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \quad (126)$$

Das Gebietsintegral lässt sich in Polarkoordinaten wie folgt darstellen:

$$dG = r dr d\varphi \quad (127)$$

$$\iint_G \Phi(r, \varphi) dG = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} \Phi(r, \varphi) r dr d\varphi \quad (128)$$

### 5.3.2 Volumenintegrale

#### Volumenintegrale in kartesischen Koordinaten

Dreifache Integrale werden auch als Raum- bzw. Volumenintegrale bezeichnet. Hierzu wird ein beschränktes Gebiet des Raums  $\mathbf{R}$  zunächst in  $n$  Raumelemente  $\Delta R_i$  aufgeteilt. Dann wird über die  $n$  Raumelemente summiert. Verfeinert man die Zerlegung in Raumelemente, so erhält man statt der Summe für  $n \rightarrow \infty$  das Volumenintegral.

$$\text{Volumen} = \iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{a_1}^{a_2} \left( \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left[ \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dy \right) dx \quad (129)$$

#### Volumenintegrale in Kugelkoordinaten

Die Polarkoordinaten  $r$ ,  $\theta$  und  $\varphi$  sind wie folgt definiert:

- $r \geq 0$  ist der Abstand des Punktes  $P$  vom Ursprung des Koordinatensystems  $O$ ,
- $\theta$  ist der Winkel, den die Gerade  $\overline{OP}$  mit der  $x,y$ -Ebene einschließt.  
Für  $\theta$  gilt:  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ .
- $\varphi$  ist der Winkel, den die Projektion der Geraden  $\overline{OP}$  auf die  $x,y$ -Ebene ( $\overline{OP'}$ ) mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt. Für  $\varphi$  gilt:  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \theta \end{aligned} \quad (130)$$

Die Integration erfolgt durch die Summierung über die in Abbildung 5.1. dargestellten Raumelemente. Man erhält:

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \quad (131)$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{R_1}^{R_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r, \theta, \varphi) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \quad (132)$$

#### Herleitung mit Hilfe der Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ r \cos \theta \cos \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \\ -r \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta \quad (133)$$

### Beispiel: Das Volumen einer homogenen Kugel

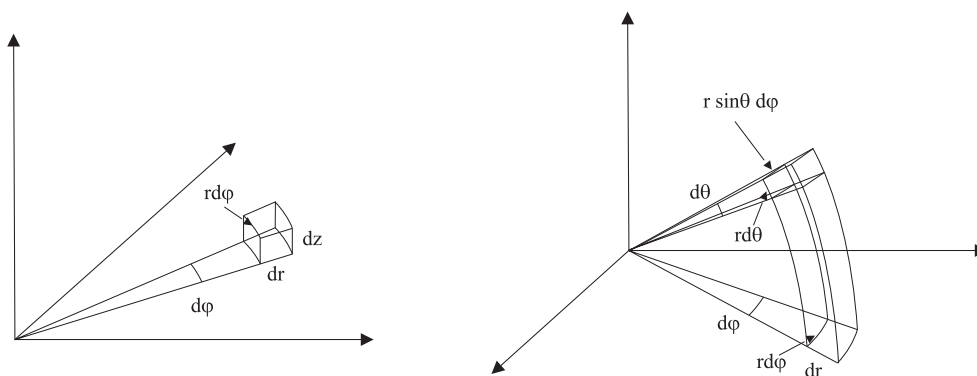
Die Dichte einer homogenen Kugel ist konstant. Zur Vereinfachung setzen wir die Dichte gleich eins, d.h.  $f(x, y, z) = 1$ .

$$\begin{aligned} \iiint_V f(x, y, z) dV &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} [-r^2 \cos \theta]_0^\pi d\varphi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 d\varphi dr = \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

### Beispiel: Masse einer Kugel, deren Dichte linear zunimmt

Die Dichte der Kugel sei im Zentrum Null und nehme linear mit dem Abstand vom Mittelpunkt zu, d.h.  $\rho(r) = r/R$ .

$$\begin{aligned} M &= \iiint_V \rho(r) dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{r}{R} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr = \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{r^3}{R} \cos \theta \right]_0^\pi d\varphi dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} 2\frac{r^3}{R} d\varphi dr = \\ &= \int_0^R 4\pi \frac{r^3}{R} dr = \pi R^3 \end{aligned}$$



Zylinderkoordinaten

Kugelkoordinaten

Abbildung 5.1.: Volumenintegrale in Zylinderkoordinaten oder Kugelkoordinaten.

Kartesische Koordinaten:	$dV = dx dy dz$
Zylinderkoordinaten:	$dV = r dr d\varphi dz$
Kugelkoordinaten:	$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$



## Volumenintegrale in Zylinderkoordinaten

Die Zylinderkoordinaten  $r$ ,  $\varphi$  und  $z$  sind wie folgt definiert:

- $r \geq 0$  ist der Abstand des Aufpunktes  $P'$  vom Ursprung  $O$ , d.h.  $r$  ist der Abstand von der Zylinderachse.
- $\varphi$  ist der Winkel, den die Gerade  $\overline{OP'}$  mit der positiven Richtung der  $x$ -Achse einschließt ( $0 \leq \varphi < 2\pi$ ).
- $z$  ist der Abstand des Punktes  $P$  von der  $x, y$ -Ebene ( $-\infty < z < \infty$ ) (Zylinderhöhe).

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \varphi \\ z &= z \end{aligned} \quad (134)$$

Die Integration erfolgt durch die Summierung über die in Abbildung 5.1. dargestellten Raumelemente. Man erhält:

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz \quad (135)$$

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_{L_1}^{L_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \int_{R_1}^{R_2} f(r, \theta, \varphi) r \, dr \, d\varphi \, dz \quad (136)$$

### Herleitung mit Hilfe der Funktionaldeterminante:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (137)$$

### Beispiel: Trägheitsmoment eines geraden Kreiszylinders

Trägheitsmoment:  $J = r^2 \cdot \Delta m$

$$\begin{aligned} J &= \iiint_V r^2 \rho_0 \, dV = \int_0^L \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 \rho_0 \, r \, dr \, d\varphi \, dz = \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{4} r^4 \rho_0 \right]_0^R d\varphi \, dz = \int_0^L \int_0^{2\pi} \frac{1}{4} R^4 \rho_0 \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^L \frac{\pi R^4}{2} \rho_0 \, dz = \frac{\pi R^4 L}{2} \cdot \rho_0 = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \end{aligned}$$

## 5.4 Differentialrechnung und Integralrechnung

### Anwendungsbeispiele aus der Physik

#### 5.4.1 Körper unter äußerer Spannung

##### Hook'sches Gesetz

Eine äußere Spannung (Kraft pro Fläche) bewirkt eine Dehnung oder Stauchung eines Gegenstands um eine bestimmte Länge. Im elastischen Bereich des Gegenstands sind die Spannung  $\sigma$  und die Dehnung  $\varepsilon$  direkt proportional zueinander. In diesem Fall gilt das Hook'sche Gesetz:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (138)$$

hierbei ist:

Spannung	$\sigma$	=	$F/A$	Kraft pro Fläche
Dehnung	$\varepsilon$	=	$\Delta l/l$	Längenänderung
Konstante	$E$		$[F/A]$	Elastizitätskonstante

Die Elastizitätskonstante  $E$  ist abhängig vom jeweiligen Material. Ab einer bestimmten maximalen Kraft wird das Material plastisch verformt und bricht bei weiterer Erhöhung der Kraft.

##### Biegung eines Balkens

Wirkt eine Kraft auf einen einseitig eingespannten Balken, so verbiegt sich dieser (siehe Abbildung 5.2). Hierbei entstehen im oberen Bereich des Balkens Zugspannungen und im unteren Bereich des Balkens Druckspannungen. In der Mitte des Balkens verläuft eine neutrale Linie, bei der sich die Zug- und Druckspannungen gegenseitig aufheben.

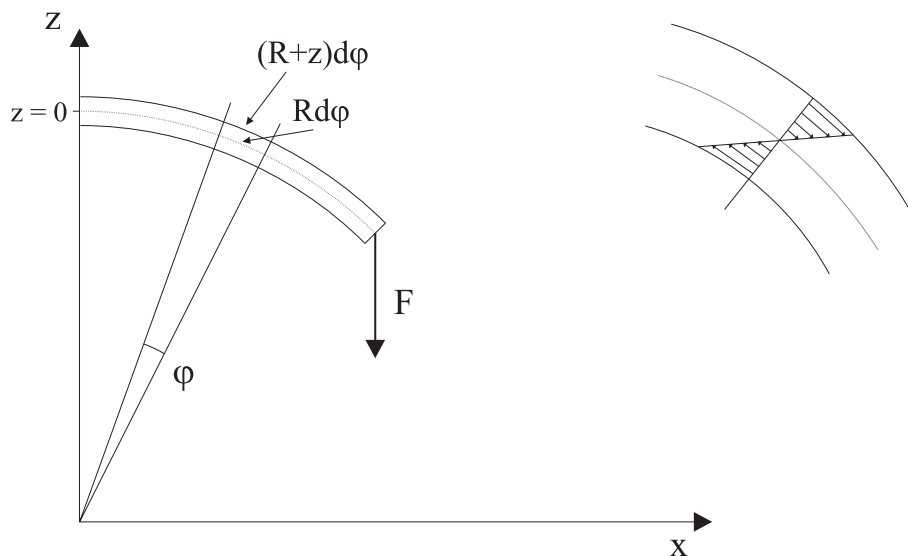


Abbildung 5.2.: Biegung eines einseitig eingespannten Balkens.

Das Ziel ist es nun, den Krümmungsradius des gebogenen Balkens zu bestimmen. Dazu berechnen wir zunächst die auftretende Spannung  $\epsilon_x$  entlang der  $x$ -Achse.

$$\epsilon = \frac{d\xi}{dx} = \frac{(R+z)d\varphi - R d\varphi}{dx} = \frac{z d\varphi}{dx} = \frac{z}{R} \quad (139)$$

Hierbei ist:  $dx = R \cdot d\varphi$  und somit  $d\varphi/dx = 1/R$ .

Die Kraft im Balken bewirkt ein Drehmoment  $\mathbf{M} = l \cdot F$ .

Hierbei ist  $l$  die Länge des Balkens.

$$d\mathbf{M} = z \cdot dF = z \cdot \sigma(z) dA \quad (140)$$

wobei  $A$  der Querschnitt des Balkens ist.

Für das Biegemoment erhält man:

$$\mathbf{M} = \int d\mathbf{M} = \int z dF = \int z \cdot \sigma(z) dA = E \int \frac{z^2}{R} dA = \frac{E}{R} \int z^2 dA \quad (141)$$

Führt man das Flächenträgheitsmoment  $\mathbf{J}_A$  ein,

$$\mathbf{J}_A = \int z^2 dA \quad (142)$$

so lautet das Biegemoment:

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \frac{E}{R} \int z^2 dA \\ &= E \cdot \mathbf{J}_A \cdot \frac{1}{R} \end{aligned} \quad (143)$$

Das Flächenträgheitsmoment lässt sich für jeden beliebigen Balkenquerschnitt berechnen.

Im Folgenden wird der Fall eines rechteckigen Balkenquerschnitts (Höhe  $h$  und Breite  $b$ ) diskutiert:

$$\mathbf{M} = \frac{E}{R} \int z^2 dA = \frac{E}{R} \cdot b \cdot \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz = \frac{E}{R} \cdot b \cdot \left[ \frac{z^3}{3} \right]_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} \frac{E \cdot b \cdot h^3}{R} \quad (144)$$

Durch Gleichsetzen mit  $\mathbf{M} = l \cdot F$  erhält man den Biegeradius  $R$ :

$$R = \frac{1}{12} \frac{E \cdot b \cdot h^3}{F \cdot l} \quad (145)$$

## 5.4.2 Viskosität von Flüssigkeiten

### Newton'sches Gesetz der inneren Reibung

Die Viskosität von Flüssigkeiten beschreibt die im Inneren einer fließenden Flüssigkeit auftretende Reibung. Im Falle einer laminaren Strömung lässt sich dies mit dem Modell von konstanten Flüssigkeitsschichten beschreiben, die sich gegeneinander verschieben. An der jeweiligen Grenzschicht treten Reibungskräfte auf.

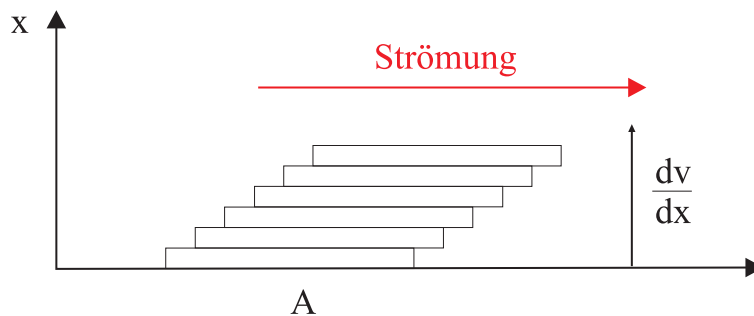


Abbildung 5.3.: Viskosität / Modell von konstanten Flüssigkeitsschichten.

Fließt eine Flüssigkeit an einer ebenen, festen Grenz wand vorbei (Fläche  $A$ ), so übt sie auf diese eine Kraft  $F_R$  aus.

Diese Reibungskraft ist direkt proportional zum Geschwindigkeitsgefälle der Flüssigkeit senkrecht zur Fläche der Grenz wand ( $d\vec{v}/dx$ ) und direkt proportional zur Fläche  $A$  der Grenz wand.

$$F_R \propto A \cdot \frac{d\vec{v}}{dx} \quad (146)$$

Somit erhält man das Newton'sche Gesetz der inneren Reibung von Flüssigkeiten:

$$\tau_R = \eta \cdot \frac{d\vec{v}}{dx} \quad (147)$$

Hierbei ist  $\tau_R$  die Reibungs-Schubspannung ( $\tau_R = F_R/A$ ) und  $\eta$  ist die Viskosität der jeweiligen Flüssigkeit.

### Prandtl'sche Grenzschicht

Bei der inneren Reibung von Flüssigkeiten ist besonders die Grenzschicht von Bedeutung. Die Flüssigkeit „haftet“ an der Oberfläche der Grenzschicht, d.h. die Geschwindigkeit der Flüssigkeit ist an der Grenzschicht gleich Null und nimmt mit dem Abstand von der Grenzfläche zu.

Andersherum, dringt eine Platte in eine Flüssigkeit ein, so wird die Flüssigkeitsschicht, die der Platte am nächsten steht, mitgerissen. Das Geschwindigkeitsprofil nimmt mit dem Abstand von der Platte stark ab, d.h. nur eine gewisse Grenzschicht der Flüssigkeit spürt die Bewegung der Platte.

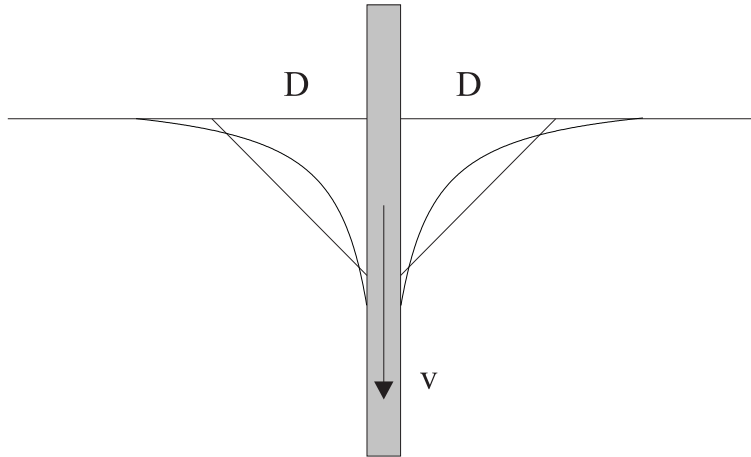


Abbildung 5.4.: Prandtl'sche Grenzschicht beim Eintauchen einer Platte in eine Flüssigkeit.

Zur Vereinfachung wird das Strömungsprofil durch ein lineares Profil ersetzt:

$$\vec{v}_x = \begin{cases} v_0 \left(1 - \frac{x}{D}\right) & x \leq D \\ 0 & x > D \end{cases} \quad (148)$$

Es gilt das Newton'sche Reibungsgesetz:  $F_R = -\eta \cdot A \cdot \frac{v}{D}$ .

Zur Aufrechterhaltung der Geschwindigkeit der Platte muss eine Kraft aufgewendet werden, die dieser Reibungskraft entgegenwirkt:  $F = -F_R$ .

In der Impulsdarstellung:

Anschaulich: durch einen kurzen Impuls legt die Platte die Wegstrecke  $l$  zurück:

$$F \cdot t = \eta \cdot A \cdot \frac{v}{D} \cdot t = \eta \cdot A \cdot \frac{l}{D} \quad (149)$$

$$p = \int v(x) \, dm = \varrho_0 \int v(x) \, dV = \varrho_0 \cdot A \int v(x) \, dx \quad (150)$$

$$= \varrho_0 \cdot A \cdot v_0 \int_0^D \left(1 - \frac{x}{D}\right) \, dx = \varrho_0 \cdot A \cdot v_0 \cdot \frac{D}{2} \quad (151)$$

Durch Gleichsetzen beider Impulsgleichungen erhalten wir den Ausdruck für die Prandtl'sche Grenzschicht:

$$D = \sqrt{\frac{2 \cdot \eta \cdot l}{\varrho_0 \cdot v_0}} \quad (152)$$

Dieses Ergebnis stimmt in etwa bis auf den Faktor  $\sqrt{2}$  mit der tatsächlichen Dicke der Grenzschicht überein. Grund für die Abweichung ist die oben eingeführte Näherung der linearen Abnahme des Geschwindigkeitsprofils.

## Das Gesetz von Hagen–Poiseuille

Wir betrachten nun die laminare Strömung in einem Rohr mit konstantem Radius  $R$  und der Länge  $l$ . Die Strömung ist in der Mitte des Rohres am größten und am Rand gleich Null, d.h. die Flüssigkeit „haftet“ an der Rohrwand.

Das erste Ziel ist es, das Strömungsprofil im Inneren des Rohres zu berechnen. Hierbei gilt das Newton'sche Reibungsgesetz für Flüssigkeiten:

$$F_R = A_l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dx} = 2\pi r \cdot l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad (153)$$

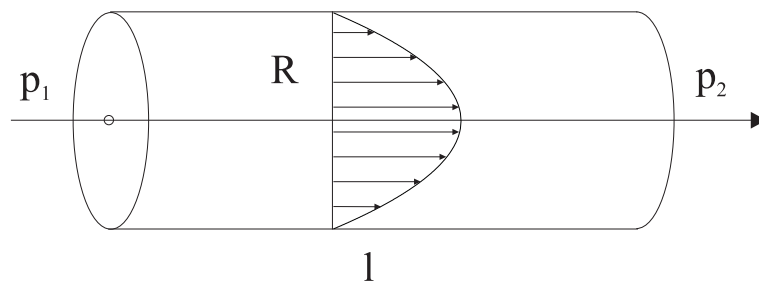


Abbildung 5.5.: Strömung in einem Rohr.

Um die Strömung in dem Rohr aufrechtzuerhalten, benötigen wir einen Anfangsdruck  $P_1$ . Im Rohr fällt der Druck kontinuierlich ab, d.h. es liegt ein Druckgefälle ( $P_1 - P_2$ ) vor, wobei  $P_2$  der Druck am Ende des Rohres ist. An der Frontfläche  $A_Q$  wirkt somit die Druckkraft:

$$F_P = r^2 \pi (P_1 - P_2) \quad (154)$$

Durch Gleichsetzen der Druck- und der Reibungskraft erhält man:

$$\begin{aligned} F_R &= F_P & (155) \\ 2\pi r l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} &= r^2 \pi (P_1 - P_2) \\ \frac{dv}{dr} &= \frac{\Delta P \cdot r}{2 l \eta} \\ \int_0^{v(r)} dv &= \int_r^R \frac{\Delta P \cdot r}{2 l \eta} dr \\ v(r) &= \frac{\Delta P}{4 l \eta} (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

Das Strömungsprofil im Inneren eines Rohres entspricht im Falle von laminarer Strömung einer quadratischen Funktion.

## Durchflussmenge durch das Rohr

Im zweiten Schritt wird die Durchflussmenge der Flüssigkeit, d.h. die Volumenstromstärke bestimmt:

$$\begin{aligned} I &= \dot{V} = \frac{dV}{dt} = A_Q \cdot v(x) = \\ &= \int_0^R 2\pi r v(r) dr \\ &= \int_0^R 2\pi r \frac{\Delta p}{4 l \eta} (R^2 - r^2) dr \\ &= \int_0^R \pi \frac{\Delta p}{2 l \eta} (rR^2 - r^3) dr \\ &= \pi \frac{\Delta p}{2 l \eta} \left( \frac{r^2 R^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right)_0^R \\ &= \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p}{l \eta} R^4 \end{aligned}$$

Dies ist das sogenannte **Hagen–Poiseuille’sche Gesetz**.

$$I = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8} \frac{\Delta p}{l \eta} R^4 \quad (156)$$

Die Durchflussmenge durch ein Rohr ist:

- proportional zur 4. Potenz des Radius,
- proportional zum Druckgefälle  $\Delta p/l$  im Rohr,
- umgekehrt proportional zur Viskosität  $\eta$ .

Das sogenannte Durchfluss–Viskosimeter arbeitet nach dem Prinzip des Hagen–Poiseuille’schen Gesetzes.

Es ist stets zu beachten, dass das Hagen–Poiseuille’sche Gesetz nur für laminare Strömungen gilt. Im Falle einer turbulenten Strömung ist die Durchflussmenge der Flüssigkeit durch das Rohr deutlich reduziert.

### 5.4.3 Das Gravitationsgesetz

Die zwischen zwei punktförmigen Massen  $m_1$  und  $m_2$  bestehende Anziehungskraft ist proportional zu beiden Massen und umgekehrt proportional zum Quadrat ihres Abstands.

$$\begin{aligned} F_{1/2} &= -G \frac{m_1 \cdot m_2}{(\Delta r_{1/2})^2} \\ &= -G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \end{aligned} \quad (157)$$

#### Die Gravitationskonstante $G$

Die Gravitationskonstante  $G$  wurde erstmals von Henry Cavendish (1731-1810) im Jahre 1798 bestimmt. Zur genauen Messung der Gravitationskonstante verwendet man die Drehwaage.

Die Gewichtskraft einer Masse auf der Oberfläche einer Kugel beträgt:

$$F_G = G \frac{M}{R_K^2} \cdot m \quad (158)$$

Somit gilt für die Gewichtsbeschleunigung:

$$g = F_G/m = G \frac{M}{R_K^2} \quad (159)$$

Die experimentell bestimmte Gravitationskonstante beträgt:

$$G = 6.6725 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$$

Beispiele:

Erde	$g = 9.81 \text{ m/s}^2$	Radius $6,378 \cdot 10^6 \text{ m}$	Masse $5.98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Mond	$g = 1.6 \text{ m/s}^2$	Radius $1.74 \cdot 10^6 \text{ m}$	Masse $7,35 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Sonne	$g = 276 \text{ m/s}^2$	Radius $6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$	Masse $2,0 \cdot 10^{30} \text{ kg}$

#### Gravitationsgesetz für mehrere Massen bzw. ausgedehnte Massenkörper

Falls die Gewichtskräfte mehrerer Massen auf eine Masse einwirken, summiert man über sämtliche Gewichtskräfte.

$$\vec{F} = -G \cdot m \cdot \sum_i \frac{M_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (160)$$

Im Fall einer inhomogenen Massenverteilung um eine gegebene Masse erhält man die resultierende Gewichtskraft durch Integration über die Massenverteilung.

$$\vec{F} = -G \cdot m \int_M \frac{dM}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} \quad (161)$$



## Gravitationskraft einer homogenen Hohlkugel auf einen Massepunkt

Die Kraft eines infinitesimalen Massenelements  $dM$  der Hohlkugel auf die „Beobachter“-Masse  $m$  ist:

$$dF = -G \frac{m \cdot dM}{|\vec{r} - \vec{R}|^2} = -G \cdot \frac{m \cdot dM}{s(\theta)^2} \quad (162)$$

Hierbei ist  $\vec{R}$  der Radius der Hohlkugel,  $\vec{r}$  der Abstand der „Beobachter“-Masse  $m$  vom Mittelpunkt der Hohlkugel und  $\vec{s}(\theta)$  der Abstand der „Beobachter“-Masse  $m$  vom Massenelement  $dM$  der Hohlkugel:  $\vec{s}(\theta) = \vec{R} - \vec{r}$ . Das Massenelement der Hohlkugel lässt sich auch über die Dichte ausdrücken:  $dM = \rho dV$ . Mit Hilfe der Kugelkoordinaten erhält man:

$$dF = -G \frac{m \cdot \rho R^2 \sin \theta dR d\theta d\varphi}{s(\theta)^2} \quad (163)$$

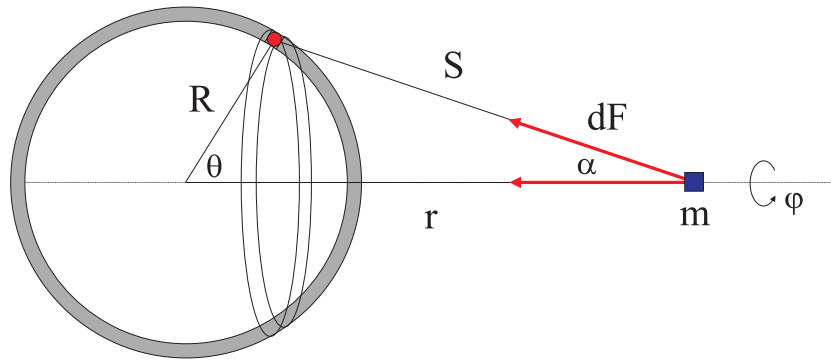


Abbildung 5.6.: Berechnung der Gravitationskraft einer Hohlkugel.

Als Erstes berechnen wir die Gravitationskraft eines Kreisringes auf die „Beobachter“-Masse. Dieser Kreisring entspricht der Rotation des Massenelements  $dM$  um die Achse  $\vec{r}$  (Drehwinkel  $\varphi$ ).

Die resultierende Kraft verläuft entlang der Drehachse  $\vec{r}$ , da sich alle senkrechten Kraftkomponenten gegenseitig aufheben. Aus diesem Grund trägt nur die senkrechte Projektion von  $d\vec{F}$  auf die Drehachse  $\vec{r}$  zur Gesamtkraft bei:

$$\begin{aligned} dF_{\text{Ring}} &= \int_{\text{Ring}} dF \cdot \cos \alpha = -G \frac{m \cdot \rho R^2 \sin \theta dR d\theta}{s(\theta)^2} \cdot \cos \alpha \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \quad (164) \\ &= -G \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 \sin \theta dR d\theta}{s(\theta)^2} \cdot \cos \alpha \end{aligned}$$

Im nächsten Rechenschritt wird versucht, den Winkel  $\theta$  zu eliminieren.

$$s(\theta)^2 = |\vec{s}|^2 = |\vec{R} - \vec{r}|^2 = R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta \quad (165)$$

Durch Differenzieren nach  $d\theta$  erhält man:

$$\begin{aligned} 2s \cdot \frac{ds}{d\theta} &= 2Rr \cdot \sin \theta \\ \sin \theta d\theta &= \frac{s ds}{Rr} \end{aligned}$$

Somit erhält man:

$$dF_{\text{Ring}} = -G \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{s(\theta)^2} \cdot \sin \theta d\theta \cdot \cos \alpha \quad (166)$$

$$= -G \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{s^2} \cdot \frac{s ds}{Rr} \cdot \cos \alpha \quad (167)$$

Zur Eliminierung von  $\alpha$  verwenden wir:

$$|\vec{R}|^2 = |\vec{r} - \vec{s}|^2 = r^2 + s^2 - 2rs \cos \alpha \quad (168)$$

und somit:

$$\cos \alpha = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs}$$

Dieses Teilergebnis kann man in die Gleichung für  $dF_{\text{Ring}}$  einsetzen:

$$dF_{\text{Ring}} = -G \cdot \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{s^2} \cdot \frac{s ds}{Rr} \cdot \cos \alpha \quad (169)$$

$$= -G \cdot \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{Rr} \cdot \frac{ds}{s} \cdot \left( \frac{s^2 + r^2 - R^2}{2rs} \right)$$

$$= -G \cdot \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{2Rr^2} \cdot \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) \cdot ds$$

Im letzten Schritt integrieren wir über die gesamte Kugelschale, d.h. über die Strecke  $s(\theta)$ . Die Strecke  $s(\theta)$  beinhaltet den Winkel  $\theta$ , die Integration entlang  $s(\theta)$  entspricht also der Integration über den Winkel  $\theta$ .

$$F_{\text{Kugelschale}} = \int dF_{\text{Ring}} \quad (170)$$

$$= -G \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{2Rr^2} \cdot \int_s \left( 1 + \frac{r^2 - R^2}{s^2} \right) ds$$

$$= -G \frac{2\pi m \cdot \rho R^2 dR}{2Rr^2} \cdot \left[ s - \frac{r^2 - R^2}{s} \right]_{s(\theta=0)}^{s(\theta=\pi)}$$

Die gesamte Masse der Hohlkugel beträgt:  $M = 4\pi R^2 dR \cdot \rho$

Somit erhalten wir:

$$F_{\text{Kugelschale}} = -G \frac{m M}{4Rr^2} \cdot \left[ s - \frac{r^2 - R^2}{s} \right]_{s(\theta=0)}^{s(\theta=\pi)} \quad (171)$$

Außerhalb der Hohlkugel gilt:

$$s(\theta = 0) = r - R$$

$$s(\theta = \pi) = r + R$$

$$F_{\text{Hohlkugel}} = -G \frac{m \cdot M}{2R r^2} \cdot 4R = -G \frac{m M}{r^2} \quad (172)$$

Das Gravitationsfeld entspricht außerhalb der Hohlkugel genau dem Gravitationsgesetz.

Innerhalb der Hohlkugel gilt:

$$s(\theta = 0) = R - r$$

$$s(\theta = \pi) = R + r$$

$$F_{\text{Hohlkugel}} = -G \frac{m \cdot M}{2R r^2} \cdot 0 = 0 \quad (173)$$

Im Innern der Hohlkugel ist das Gravitationsfeld gleich Null. Im anschaulichen Gedankenexperiment erkennt man, dass sich die Gewichtskräfte zweier gegenüberliegender Masenelemente  $dM_1$  und  $dM_2$  gegenseitig aufheben.

### Gravitationskraft einer Vollkugel

Man kann sich eine Vollkugel aus zusammengesetzten Kugelschalen vorstellen. Befindet sich unsere „Beobachter“-Masse außerhalb der Vollkugel, so gilt:

$$F_K = \sum_i F_{\text{Schale},i} \sum_i -G \frac{m M_i}{r^2} = -G \frac{m \sum_i M_i}{r^2} = -G \frac{m M_{\text{Kugel}}}{r^2} \quad (174)$$

Befindet sich unsere „Beobachter“-Masse  $m$  im Inneren der Vollkugel, so tragen alle Kugelschalen „oberhalb“ von  $m$ , entsprechend obigem Ergebnis, nicht zur Gravitationskraft bei. Nur die Kugelschalen „unterhalb“ von  $m$  zählen:

$$F = -G \frac{m}{r^2} \cdot \int_0^r \rho(R) 4\pi R^2 dR \quad (175)$$

Für eine homogene Kugel folgt:

$$F = -G \frac{m}{r^2} \cdot \rho \cdot \int_0^r 4\pi R^2 dR = -G \frac{m}{r^2} \cdot \rho \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 = -G \frac{m M_K}{R_K^3} \cdot r \quad (176)$$

Ergebnis:

Außerhalb der Vollkugel fällt die Gravitationskraft mit  $1/r^2$  ab.

Im Inneren der Vollkugel nimmt die Gravitationskraft linear mit dem Abstand  $r$  vom Mittelpunkt zu.

Ferner:

Eine homogene Vollkugel erscheint, als ob ihre gesamte Masse im Mittelpunkt vereint wäre.

## 6 Vorlesung: 9.1. 2006

### Komplexe Zahlen

#### 6.1 Zahlentheorie

$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ , Menge der natürlichen Zahlen,

Grundrechenart: 1. Stufe **Addition**

$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ , Menge der ganzen Zahlen,

Grundrechenart: 1. Stufe **Subtraktion**

$Q = \{\frac{r}{s} | r \in Z \wedge s \in Z\}$ , Menge der rationalen Zahlen,

Grundrechenart: 2. Stufe **Division**

$R = \{-\infty, +\infty\}$ , Menge der reellen Zahlen,

Grundrechenart: 3. Stufe **Potenz, Exponentialfunktion, Logarithmus,  
Trigonometrische Funktionen,  
Wurzel??**

#### Problem:

Bei den bisher betrachteten Zahlenmengen lässt sich keine Lösung für die Wurzel eines negativen Argumentes angeben!

#### Abhilfe: Komplexe Zahlen $C$

$\sqrt{-1}$  hat keine reelle Lösung, aber eine komplexe!

#### 6.2 Darstellung einer komplexen Zahl

Eine komplexe Zahl lässt sich als ein Zahlenpaar darstellen:  $z_1 = (a_1, b_1)$ .  
Dies entspricht analog einem Vektor in der Ebene.

Komplexe Zahlen bestehen aus **Realteil** und **Imaginärteil**, wobei beide Teile  $x$  und  $y$  jeweils eine reelle Zahl sind:

$$x = \operatorname{Re}(z)$$

$$y = \operatorname{Im}(z)$$

#### Imaginäre Einheit:

$i$	=	$(0, 1)$
$i^2$	=	$-1$

#### Darstellung einer komplexen Zahl:

$z_1 = a_1 + i \cdot b_1$
---------------------------

## Grundrechenarten:

- Addition:** erfolgt komponentenweise (siehe unten),  
**Multiplikation:** die einzelnen Komponenten müssen ausmultipliziert werden,  
**Division:** es ist zu vermeiden, dass die imaginäre Einheit im Zähler stehen bleibt; daher sollte man den Bruch sinnvoll erweitern.

## 6.3 Komplexe Zahlen: Darstellung in Polarkoordinaten

Eine komplexe Zahl kann in der zweidimensionalen Zahlenebene sowohl in kartesischen als auch in Polarkoordinaten dargestellt werden:

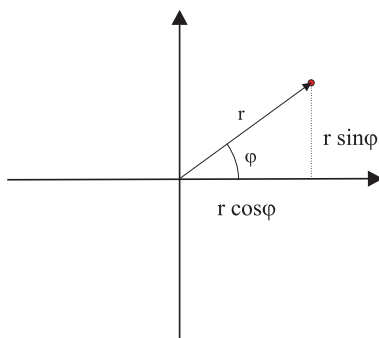


Abbildung 6.1.: Darstellung einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten.

Die Entfernung des Punktes  $z$  vom Ursprung heißt Betrag von  $z$  und der Winkel, den die Verbindungsgerade  $\overline{OZ}$  mit der reellen Zahlenachse einschließt, ist das Argument der komplexen Zahl  $z$ .

$$\begin{aligned}z &= x + iy \\|z| &= \sqrt{x^2 + y^2} = r \\ \tan \varphi &= y/x\end{aligned}$$

**Betrag:**  $r$  heißt Betrag der komplexen Zahl  $z$

**Argument:**  $\varphi = \arg(z)$  heißt Argument von  $z$ .

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \varphi \\y &= r \cdot \sin \varphi\end{aligned}$$

$$z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Beispiel:

$$\begin{aligned}z &= 1 - 2i \\r &= |z| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} \\ \varphi &= \arctan(-2/1) = 63,4^\circ\end{aligned}$$

## 6.4 Euler'sche Formel

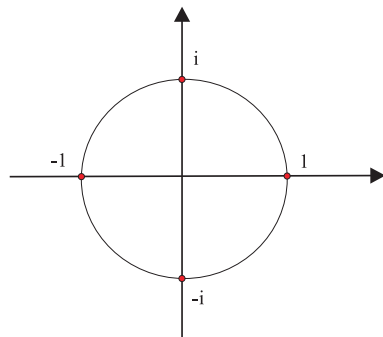
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Nach der Euler'schen Formel liegen alle komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 auf dem Einheitskreis.

kartesische Darstellung:  $(x, y) \quad z = x + iy$

polare Darstellung:  $(r, \varphi) \quad z = r \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Euler'sche Darstellung:  $(r, \varphi) \quad z = r \cdot e^{i\varphi}$



$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^{i\pi/2} &= i \\ e^{i\pi} &= -1 \\ e^{i3\pi/2} &= -i \end{aligned}$$

$$e^{i\pi} = -1$$

Die Euler'sche Formel verbindet die drei wichtigsten Zahlen:  $e$ ,  $\pi$ , und das imaginäre  $i$

**konjugiert komplexe Zahl:**

$z = x + iy$  komplexe Zahl

$z^* = x - iy$  konjugiert komplexe Zahl

$z = r \cdot e^{i\varphi}$  komplexe Zahl

$z^* = r \cdot e^{-i\varphi}$  konjugiert komplexe Zahl

$$|z|^2 = z \cdot z^*$$

Graphisch: Spiegelung der komplexen Zahl an der x-Achse.

## 6.5 Rechenregeln

Gegeben seien die beiden komplexen Zahlen  $z_1$  und  $z_2$ :

$$\begin{aligned}z_1 &= r_1 \cdot e^{i\varphi_1} = x_1 + iy_1 \\z_2 &= r_2 \cdot e^{i\varphi_2} = x_2 + iy_2\end{aligned}$$

Addition:

$$\begin{aligned}z_1 + z_2 &= (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\&= r_1 \cdot e^{i\varphi_1} + r_2 \cdot e^{i\varphi_2}\end{aligned}$$

Multiplikation:

$$\begin{aligned}z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \\&= r_1 \cdot r_2 \cdot e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = r_1r_2 \cdot e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}\end{aligned}$$

Division:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\&= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\&= \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}\end{aligned}$$

Exponentialfunktion:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

Logarithmus:

$$\ln z = \ln(r \cdot e^{i\varphi}) = i\varphi + \ln r$$

## 6.6 Potenz einer komplexen Zahl: Formel von Moivre

Potenz einer komplexen Zahl:

$$z^k = (r e^{i\varphi})^k = r^k \cdot e^{i\varphi k} = r^k(\cos k\varphi + i \sin k\varphi)$$

### Kreisteilungsgleichung: Wurzel einer komplexen Zahl:

$$\sqrt{z} = \sqrt{r \cdot e^{i\varphi}} = \pm \sqrt{r} \cdot e^{i\varphi/2}$$

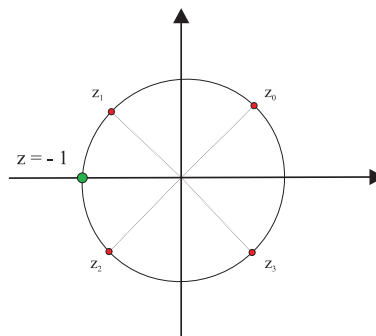
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r \cdot e^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\varphi/n + \frac{k}{n} 2\pi)} ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Falls der Betrag der komplexen Zahl 1 ist ( $|z| = 1$ ), so liegen alle Lösungen der  $n$ -ten Wurzel auf einem Einheitskreis, d.h. der Einheitskreis wird in  $n$  Teilstücke unterteilt.

Beispiel:

$$z = -1$$

$$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{-1} = (1 \cdot e^{i\pi})^{1/4} = e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k)}$$



$k = 0$	$z_0 = e^{i(\pi/4)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} ;$	$\varphi = 45^\circ$
$k = 1$	$z_1 = e^{i(3\pi/4)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} ;$	$\varphi = 135^\circ$
$k = 2$	$z_2 = e^{i(5\pi/4)} = -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} ;$	$\varphi = 225^\circ$
$k = 3$	$z_3 = e^{i(7\pi/4)} = \frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2} ;$	$\varphi = 315^\circ$

## 6.7 Anwendungsbeispiel aus der Physik: Die Kreisbewegung

Die Kreisbewegung lässt sich sehr elegant mit Hilfe der komplexen Zahlen beschreiben:

$$z(t) = r \cdot e^{i\omega \cdot t}$$

$$\dot{z}(t) = i\omega r \cdot e^{i\omega \cdot t} = i\omega z(t)$$

$$\ddot{z}(t) = -\omega^2 r \cdot e^{i\omega \cdot t} = -\omega^2 z(t)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist hierbei wie folgt definiert:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt}$$

### Radialbeschleunigung:

$$\vec{a}_r = \omega(t) \times \vec{v}(t)$$

$$= \omega(t) \times (\omega(t) \times \vec{r}(t))$$

$$= -\omega^2 \vec{r}(t)$$



## Vorlesung: 16.1. 2006

### 7 Differentialgleichungen

#### 7.1 Differentialgleichungen 1. Ordnung

##### 7.1.1 Allgemeine Bemerkungen zu Differentialgleichungen

Besteht zwischen einer Funktion und ihren Ableitungen eine direkte Beziehung, so spricht man von einer **Differentialgleichung (DGL)**. Jede Lösungsfunktion wird auch **Integral** der Differentialgleichung genannt.

Wenn die in der DGL auftretenden Funktionen nur von einer unabhängigen Veränderlichen abhängen, so spricht man von einer **gewöhnlichen Differentialgleichung**.

Wenn hingegen mehrere Veränderliche vorliegen und dementsprechend partielle Ableitungen auftreten, so spricht man von einer **partiellen Differentialgleichung**.

Eine allgemeine Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung enthält genau  $n$  unbestimmte Konstanten  $c_1, c_2, \dots, c_n$ , d.h. die Lösung einer DGL  $n$ -ter Ordnung ist eine  $n$ -parametrische **Funktionenschar**.

Erst wenn weitere Informationen über die Lösungsfunktion bekannt sind, kann eine exakte Lösung angegeben werden (**Anfangswertproblem – AWP**).

Nicht jede DGL ist exakt lösbar. Oftmals läßt sich die Lösung der DGL nur numerisch, beispielsweise durch eine Zerlegung in Polynome (z.B. die Legendre'schen Polynome) darstellen. In speziellen Fällen genügt es, unter Verzicht auf die vollständige Lösung, die auftretenden analytischen Eigenschaften des Integrals an der Stelle  $x_0$  festzulegen, und den Verlauf der Integralkurve von diesem Punkt aus zu beschreiben.

##### 7.1.2 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung mit getrennten Variablen

Eine stetige lineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Variablen hat die Form:

$$y' = f(x) y + g(x)$$

Diese DGL hat einen homogenen und einen inhomogenen Teil:

<b>Homogene DGL:</b>	$y' = f(x) y$	$y' - f(x) y = 0$
<b>Inhomogene DGL:</b>	$y' = f(x) y + g(x)$	$y' - f(x) y = g(x)$

Im ersten Schritt muss immer die homogene DGL gelöst werden. Basierend auf der Lösung der homogenen DGL kann dann im zweiten Schritt die inhomogene DGL, z.B. durch Variation der Konstanten, bestimmt werden.

### 7.1.3 Lösung der homogenen DGL:

$$y' = f(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot y$$

$$\frac{dy}{y} = f(x) dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int f(x) dx$$

$$\ln y = \int f(t) dt$$

$$y = c \cdot e^{\int f(t) dt}$$

Anmerkung: Die Integrationskonstante  $c$  ging bei der Ableitung verloren. Da  $c$  unbestimmt ist, ist die Lösung eine Funktionenschar.

#### Anfangswertproblem (AWP):

Um die Integrationskonstante  $c$  bestimmen zu können, benötigt man zusätzliche Informationen über die Funktion, z.B.

$$y(x_0) = y_0$$

Im einfachsten Fall lassen sich die Integrationskonstanten durch Einsetzen der Werte des AWP's in die allgemeine Lösung der Differentialgleichung bestimmen.

#### Beispiel:

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\ln y = \int 1 dt = x + c$$

$$y = c \cdot e^x$$

**Beispiel:**

$$y' = -\frac{1}{2x} y$$

$$\int f(t) dt = \int -\frac{1}{2t} dt = -\frac{1}{2} \ln x$$

$$y = c \cdot e^{-\frac{1}{2} \ln x} = c \cdot x^{-\frac{1}{2}} = c \cdot \frac{1}{\sqrt{|x|}}$$

#### 7.1.4 Lösung der inhomogenen DGL: (Variation der Konstanten)

$$y' = f(x) y + g(x)$$

Ausgangspunkt der Herleitung ist die Lösung der homogenen DGL 1. Ordnung:

$$y_H(x) = c(x) \cdot e^{\int f(t) dt}$$

Variation der Konstanten bedeutet, dass die Konstante  $c$  durch eine Funktion  $c(x)$  ersetzt wurde. Die Ableitung der homogenen Lösung lautet dann:

$$\begin{aligned} y'_H(x) &= c'(x) \cdot e^{\int f(t) dt} + c(x) \cdot e^{\int f(t) dt} \cdot f(x) \\ &= g(x) + y_H(x) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Durch direkten Vergleich erhält man:

$$\begin{aligned} g(x) &= c'(x) \cdot e^{\int f(t) dt} \\ c'(x) &= g(x) \cdot e^{-\int f(t) dt} \end{aligned}$$

Durch Integrieren erhält man die Lösung für  $c(x)$ :

$$c(x) = \int g(\tau) \cdot e^{-\int f(t) dt} d\tau$$

**Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL 1. Ordnung:**

$$y(x) = c(x) \cdot e^{\int f(t) dt} = e^{\int f(t) dt} \cdot \left( \int g(\tau) \cdot e^{-\int f(t) dt} d\tau + c \right)$$

**Beispiel:**

$$y' = \frac{y}{x} + 3x$$

Lösung der homogenen DGL:  $y' = y/x$

$$y(x)_H = c \cdot e^{\int \frac{1}{t} dt} = c \cdot e^{\ln x} = c \cdot x$$

Lösung der inhomogenen DGL:  $y' = y/x + 3x$

$$\begin{aligned} y(x) &= x \cdot \left( \int^x 3\tau \cdot e^{-\int \frac{1}{t} dt} d\tau + c \right) \\ &= x \int^x 3\tau \cdot e^{-\ln \tau} d\tau + c x \\ &= c x + x \int^x 3 d\tau = 3x^2 + c x \end{aligned}$$

**Beispiel:**

$$y' = x^3 y + \sin x$$

Lösung der homogenen DGL:  $y' = x^3 y$

$$y(x)_H = c \cdot e^{\int t^3 dt} = c \cdot e^{\frac{1}{4}x^4}$$

Lösung der inhomogenen DGL:  $y' = x^3 y + \sin x$

$$y(x) = e^{\frac{1}{4}x^4} \cdot \left( \int^x \sin \tau \cdot e^{-\frac{1}{4}\tau^4} d\tau + c \right)$$

Dieses Integral läßt sich nur noch numerisch lösen!

**Anmerkung:**

Nicht jede DGL ist exakt lösbar; oftmals läßt sich eine DGL nur noch numerisch, z.B. durch Reihenentwicklung oder mit Hilfe des Computers lösen!

### 7.1.5 Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Veränderlichen

Eine stetige Differentialgleichung 1. Ordnung mit getrennten Veränderlichen hat die Form:

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

Durch Umformen erhält man:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx$$

**Beispiel:**

$$y' = y^2$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int 1 dx$$

$$-\frac{1}{y} = x + c$$

$$y = -\frac{1}{x + c}$$

**Beispiel:**

$$y' = x \cdot \sqrt{|y|}$$

$$\int \frac{dy}{\sqrt{|y|}} = \int x dx$$

$$2\sqrt{|y|} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

$$\sqrt{|y|} = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c$$

$$y = \left(\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}c\right)^2$$

## Vorlesung: 23.1. 2006

### 7 Differentialgleichungen

#### 7.2 Differentialgleichungen 2. Ordnung

##### 7.2.1 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Eine stetige, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung hat die Form:

$$y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = f(x)$$

Hierbei gilt:

$a_n(x)$ : sind die Koeffizientenfunktionen und

$f(x)$ : ist die Störfunktion.

##### **Linearität:**

Im Fall einer linearen Differentialgleichung ist die Summe zweier Lösungen bzw. das Vielfache einer Lösung wiederum eine Lösung der Differentialgleichung.

Somit sind alle Linearkombinationen von Lösungen wiederum Lösungen der Differentialgleichung.

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung besitzen zwei Partikulärlösungen, die voneinander linear unabhängig sind.

##### **Vorgehensweise zur Lösung der DGL:**

1. Lösung der homogenen Differentialgleichung.
2. Verwenden der Lösung der homogenen DGL zur Bestimmung der Lösung der inhomogenen DGL, z.B. durch Variation der Konstanten.

##### **Homogene DGL 2. Ordnung: $f(x) = 0$**

Die Lösung bildet im allgemeinen Fall einen 2-dimensionalen Raum, d.h. das System enthält zwei Integrationskonstanten. Diese lassen sich durch das Anfangswertproblem festlegen.

##### **Inhomogene DGL 2. Ordnung: $f(x) \neq 0$**

Das Hauptproblem ist es, die homogene DGL zu lösen. Eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL erhält man z.B. durch Variation der Konstanten.

### 7.2.2 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Lösung der homogenen DGL

Im Fall konstanter Koeffizienten  $a_n$  lautet die lineare DGL 2. Ordnung:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

#### Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\lambda x} \\ y'(x) &= \lambda e^{\lambda x} \\ y''(x) &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

$$(\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0) e^{\lambda x} = 0$$

Dies führt zu dem **charakteristischen Polynom**:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Dessen Lösungen

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

die Lösungen der Differentialgleichung ergeben.

**Die beiden Partikulärlösungen lauten:**

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}$$

**Bei den Lösungen der homogenen DGL unterscheidet man zwischen drei Fällen:**

1.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  **sind reelle Zahlen:**

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

Die Lösung der DGL ist zusammengesetzt aus Exponentialfunktionen.

2.  $\lambda_1 = \lambda_2$ :

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}$$

3.  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  **sind komplexe Zahlen:**

$$y(x) = c_1 e^{i\lambda_1 x} + c_2 e^{i\lambda_2 x}$$

Die Lösung der DGL ist zusammengesetzt aus Sinus- und Cosinus-Funktionen.

### 7.2.3 Beispiel: Die gedämpfte Schwingung

Wir betrachten die Schwingung einer Masse  $m$ , die an einer Feder (Federkonstante  $D$ ) hängt.  $\omega_0 = \sqrt{D/m}$  ist die Eigenfrequenz des freien, ungedämpften Pendels. Ferner wirkt eine geschwindigkeitsabhängige Reibungskraft (Reibungskonstante  $b$ ) auf die Masse.  $A_0$  ist die Anfangsauslenkung des gedämpften Federpendels.

$$m \ddot{x}(t) + b \dot{x}(t) + D x(t) = 0$$

Mit

$$\omega_0^2 = \frac{D}{m} \quad 2\gamma = \frac{b}{m}$$

erhalten wir die Bewegungsgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma \dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

Das charakteristische Polynom lautet:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

Die Lösungen sind:

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left( c_1 e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t} \right)$$

**starke Dämpfung:**  $\gamma > \omega_0$

Im Falle der starken Dämpfung ist  $\alpha = \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  eine reelle Zahl. Die Lösung der Bewegungsgleichung ist aus zwei Exponentialfunktionen zusammengesetzt:

$$x(t) = e^{-\gamma t} (c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{-\alpha t})$$

Mit den Anfangsbedingungen (AWP)  $x(0) = A_0$  und  $\dot{x}(0) = 0$  erhält man:

$$c_1 = \frac{\alpha + \gamma}{2\alpha} A_0 \quad c_2 = \frac{\alpha - \gamma}{2\alpha} A_0$$

$$x(t) = \frac{A_0}{\alpha} e^{-\gamma t} (\alpha \cosh(\alpha t) + \gamma \sinh(\alpha t))$$

wobei

$$\sinh(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} - e^{-\alpha t}) \quad \text{und} \quad \cosh(\alpha t) = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t})$$



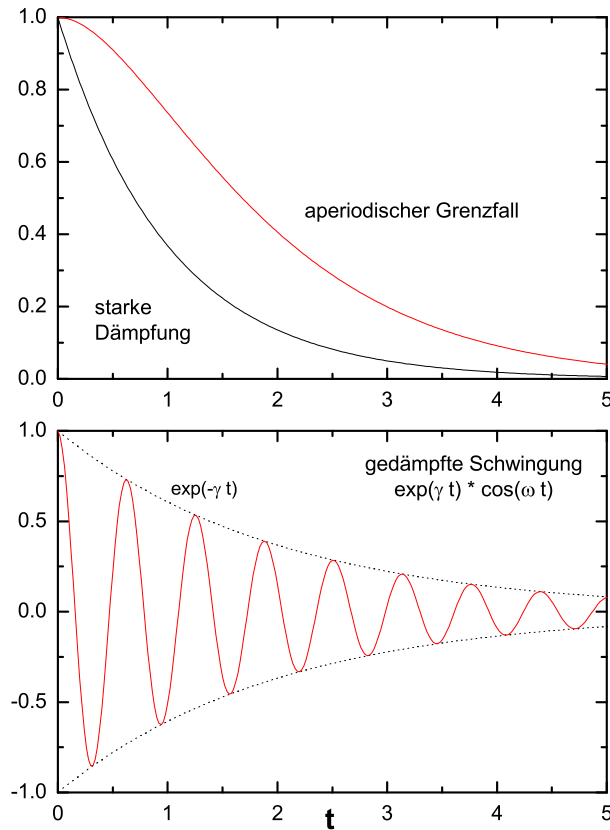


Abbildung 7.1.: Lösungen der Bewegungsgleichung einer gedämpften Schwingung: starke Dämpfung, aperiodischer Grenzfall, gedämpfte Schwingung.

**Aperiodischer Grenzfall:  $\gamma = \omega_0$**

Im aperiodischen Grenzfall ist  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} = 0$ , d.h.  $\lambda_1 = \lambda_2 = -\gamma$ .

In diesem Fall lautet die Lösung der Bewegungsgleichung:

$$x(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\gamma t}$$

Mit den Anfangsbedingungen (AWP)  $x(0) = A_0$  und  $\dot{x}(0) = 0$  erhält man:

$$x(t) = A_0 (1 + \gamma t) e^{-\gamma t}$$

### Gedämpfte Schwingung: $\gamma < \omega_0$

Im Fall einer schwachen Dämpfung  $\gamma < \omega_0$  ist  $\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$  eine komplexe Zahl, d.h. rein imaginär.

Wir setzen:

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2$$

Somit ergibt die Lösung der Bewegungsgleichung eine gedämpfte Schwingung:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} (c e^{i\omega t} + c^* e^{-i\omega t}) \\ &= A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi) \end{aligned}$$

mit:

$$A_0 = 2 |c| \quad \text{und} \quad \tan \varphi = \frac{\operatorname{Im}(c)}{\operatorname{Re}(c)}$$

Die Phasenverschiebung  $\varphi$  ergibt sich aus dem Anfangswertproblem. Mit den Anfangsbedingungen (AWP)  $x(0) = A_0$  und  $\dot{x}(0) = 0$  erhält man:

$$\varphi = 0$$

### **Anmerkungen:**

- Die Frequenz der gedämpften Schwingung  $\omega$  ist kleiner als die Frequenz der ungedämpften Schwingung  $\omega_0$ .
- Die Einhüllende der Amplitude nimmt mit  $e^{-\gamma t}$  ab.
- Die Gesamtenergie der Schwingung nimmt mit  $e^{-2\gamma t}$  ab.

## Vorlesung: 30.1 . 2006

### 7 Differentialgleichungen

#### 7.3 Inhomogene Differentialgleichungen 2. Ordnung Beispiel: Erzwungene Schwingung

Ein gedämpftes Pendel wird von außen mit der Kreisfrequenz  $\omega_e$  periodisch angeregt:  
In diesem Fall lautet die Bewegungsgleichung:

$$\ddot{\alpha}(t) + 2\gamma\dot{\alpha}(t) + \omega_0^2\alpha(t) = k \cdot \cos(\omega_e t)$$

Hierbei ist  $k = F/m$ , wobei  $F$  die Kraft des Erregers und  $m$  die Masse des Pendels ist.  
 $\omega_0^2 = D/m$  ist die Eigenfrequenz des Pendels, d.h. die Frequenz des freien ungedämpften Pendels.  $\gamma$  beschreibt die geschwindigkeitsabhängige Reibung (Dämpfung).

Nach einer kurzen Einschwingphase schwingt das Pendel mit der Frequenz des Erregers  $\omega_e$ , d.h. das Pendel passt sich der Frequenz des Erregers  $\omega_e$  an.

Diese Beobachtung kann man nutzen, um einen Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung der gedämpften Schwingung (inhomogene DGL 2. Ordnung) aufzustellen:

**Ansatz:**

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} \\ \dot{\alpha}(t) &= i\omega_e \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} \\ \ddot{\alpha}(t) &= -\omega_e^2 \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} = -\omega_e^2 \cdot \alpha(t)\end{aligned}$$

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung erhält man:

$$\begin{aligned}-\omega_e^2 \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} + i\omega_e 2\gamma \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} + \omega_0^2 \alpha_0 \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} &= k \cdot e^{i\omega_e t} \\ \alpha_0 (-\omega_e^2 + 2\gamma i\omega_e + \omega_0^2) \cdot e^{i(\omega_e t + \varphi)} &= k \cdot e^{i\omega_e t}\end{aligned}$$

somit ist:

$$\alpha_0(\omega_e) = \frac{k}{(-\omega_e^2 + 2\gamma i\omega_e + \omega_0^2)}$$

Das System schwingt nach der Einschwingphase mit der Frequenz des Erregers  $\omega_e$ . Die Amplitude ist jedoch abhängig von der Erregerfrequenz  $\omega_e$ . Ebenso stellt sich zwischen dem Erreger und dem Pendel eine Phasendifferenz  $\varphi$  ein, die ebenfalls von der Erregerfrequenz  $\omega_e$  abhängt.

Die Amplitude und die Phasenverschiebung ergeben sich aus dem Betrag und der Phase der komplexwertigen Amplitude  $\alpha_0(\omega_e)$ :

$$\begin{aligned}\alpha_0(\omega_e) &= \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2}} \\ \varphi(\omega_e) &= \arctan \frac{\text{Im}(\alpha_0(\omega_e))}{\text{Re}(\alpha_0(\omega_e))} = \arctan \frac{-2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}\end{aligned}$$

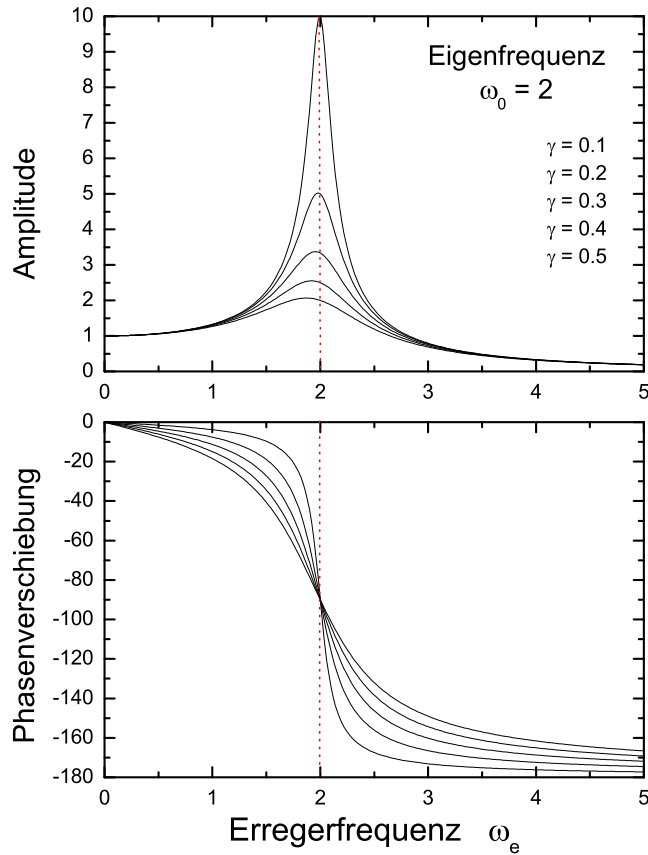


Abbildung 7.2.: Amplitude und Phase der erzwungenen Schwingung als Funktionen der Erregerfrequenz  $\omega_e$ .

$$\alpha_0(\omega_e) = \frac{k}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2}}$$

$$\varphi(\omega_e) = \arctan \frac{\text{Im}(\alpha_0(\omega_e))}{\text{Re}(\alpha_0(\omega_e))} = \arctan \frac{-2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \omega_0^2}$$

**Anmerkungen:**

- Nach dem Einschwingvorgang schwingt das System nicht mehr mit der Eigenfrequenz  $\omega_0$ , sondern mit der Frequenz des Erregers  $\omega_e$ .
- Die Resonanzfrequenz ist die Frequenz, bei der die höchste Amplitude erreicht wird.
- Die Amplitude ist umso größer, je größer die Anregeramplitude bzw. die Kraft des Anregers ist.
- Je geringer die Dämpfung, desto größer die Amplitude, insbesondere im Fall der Resonanz.
- Bei niedrigen Erregerfrequenzen folgt das Pendel dem Erreger fast ohne Phasendifferenz.

- Im Resonanzfall eilt der Erreger dem Pendel genau um  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  voraus. Hierbei findet der größte Energieübertrag statt, d.h. die Kraft des Erregers ist immer in die Bewegungsrichtung des Pendels gerichtet.
- Bei großen Anregungsfrequenzen liegt eine Phasendifferenz von nahezu  $\varphi = -\pi$  vor. Die Anregung ist der Bewegung des Pendels vollständig entgegengerichtet. Für große Anregungsfrequenzen verschwindet die Schwingungsamplitude des Pendels nahezu vollständig.

## Die Resonanzfrequenz

### 1. Amplitudenresonanz

Die Anregungsfrequenz  $\omega_e$  ist konstant.

Die Eigenfrequenz des Pendels  $\omega_0$  wird verändert.

$$\frac{d\alpha_0}{d\omega_0} = \frac{k}{-2((\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2)^{3/2}} (2(\omega_0^2 - \omega_e^2) \cdot 2\omega_0)$$

Für den Resonanzfall gilt:

$$\frac{d\alpha_0}{d\omega_0} = 0 \quad \rightarrow \quad 2(\omega_0^2 - \omega_e^2) \cdot 2\omega_0 = 0$$

Resonanz:

$$\omega_{0,Res.} = \omega_e$$

Die Resonanzfrequenz entspricht der Eigenfrequenz des Pendels.

### 2. Amplitudenresonanz

Die Eigenfrequenz des Pendels  $\omega_0$  ist konstant.

Die Anregungsfrequenz  $\omega_e$  wird variiert.

$$\frac{d\alpha_0}{d\omega_e} = \frac{k}{-2((\omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + (2\gamma\omega_e)^2)^{3/2}} (-2(\omega_0^2 - \omega_e^2) \cdot 2\omega_e + 8\gamma^2\omega_e)$$

Für den Resonanzfall gilt:

$$\frac{d\alpha_0}{d\omega_e} = 0 \quad \rightarrow \quad -(\omega_0^2 - \omega_e^2) + 2\gamma^2 = 0$$

Resonanz:

$$\omega_{e,Res.}^2 = \omega_0^2 - 2\gamma^2$$

Die Resonanzfrequenz ist kleiner als die Eigenfrequenz des Pendels.

## 7.4 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

### Allgemeine Lösung der inhomogenen DGL

Eine stetige, lineare Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die Form:

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$$

Hierbei gilt:

$a_n$ : sind die konstanten Koeffizienten und

$f(x)$ : ist die Störfunktion.

#### Vorgehensweise zur Lösung der DGL:

1. Lösung der homogenen DGL mit Hilfe des charakteristischen Polynoms.
2. Verwenden der Lösung der homogenen DGL zur Bestimmung der Lösung der inhomogenen DGL durch Variation der Konstanten.

#### 7.4.1 Lösen der homogenen DGL 2. Ordnung: $f(x) = 0$

Die Lösung der homogenen DGL 2. Ordnung erfolgt mit Hilfe des charakteristischen Polynoms:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Die Lösungen des charakteristischen Polynoms lauten:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_0}$$

Die beiden Partikulärlösungen der homogenen DGL 2. Ordnung lauten:

$$y_1(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} \qquad y_2(x) = c_2 e^{\lambda_2 x}$$

### 7.4.2 Wronski'sche Determinante

Im Falle einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung sind die beiden Partikulärlösungen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$  voneinander linear unabhängig, d.h. sie bilden ein Fundamentalsystem. Alle Linearkombinationen der Partikulärlösungen sind Lösungen der DGL. Aus der linearen Unabhängigkeit der beiden Partikulärlösungen folgt, dass der Quotient  $y_1(x)/y_2(x)$  nicht konstant sein kann.

Für die Ableitung des Quotienten  $y_1(x)/y_2(x)$  muss daher gelten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \right) &\neq 0 \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{y_1(x)}{y_2(x)} \right) &= \frac{y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x)}{y_2^2(x)} \neq 0 \\ y_1'(x)y_2(x) - y_2'(x)y_1(x) &\neq 0\end{aligned}$$

Die **Wronski'sche Determinante** ist nun wie folgt definiert:

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x)$$

Zwei Partikulärlösungen bilden genau dann ein Fundamentalsystem der Lösungen der DGL, wenn ihre Wronski'sche Determinante von Null verschieden ist.

### 7.4.3 Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung: Variation der Konstanten

Die allgemeine Lösung, d.h. inhomogene Lösung der linearen DGL 2. Ordnung ist die Summe aus der homogenen Lösung und der partikulären Lösung  $y_p(x)$ .

$$\begin{aligned}y_{inh}(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x)\end{aligned}$$

Ziel ist es nun, die partikuläre Lösung zu bestimmen. Hierzu benötigt man die beiden Partikulärlösungen  $y_1(x)$  und  $y_2(x)$ .

#### Variation der Konstanten: Lagrange-Formalismus

Ansatz:

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

Die beiden Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  wurden durch die Funktionen  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  ersetzt, d.h. wir variieren die Konstanten.

Durch Einsetzen dieses Ansatzes von  $y_p(x)$  in die DGL und geeignete Wahl der Anfangswertbedingungen (nämlich:  $c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$ ) erhält man:

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

**Herleitung:**

$$y_p(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x)$$

$$y_p'(x) = c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) + c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

mit der Anfangsbedingung  $c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$  erhält man:

$$y_p'(x) = c_1(x) y_1'(x) + c_2(x) y_2'(x)$$

$$y_p''(x) = c_1(x) y_1''(x) + c_2(x) y_2''(x) + c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x)$$

Aus dem Einsetzen von  $y_p(x)$ ,  $y_p'(x)$  und  $y_p''(x)$  in die inhomogene DGL folgt durch direkten Vergleich:

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

Somit erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0$$

$$c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x)$$

Ziel ist es,  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  zu bestimmen. Dazu löst man das Gleichungssystem nach  $c_1'(x)$  und  $c_2'(x)$  auf.  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  erhält man durch Integration.

**Bestimmung von  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  mit Hilfe der Wronski'schen Determinante:**

Mit Hilfe des Formalismus für das Rechnen mit Determinanten kann man die beiden Koeffizienten  $c_1(x)$  und  $c_2(x)$  auch wie folgt aus dem obigen Gleichungssystem berechnen:

$$c_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2(x) \\ f(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \quad \rightarrow \quad c_1(x) = \int \frac{-f(x) y_2(x)}{W(x)} dx$$

$$c_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & 0 \\ y_1'(x) & f(x) \end{vmatrix}}{W(x)} \quad \rightarrow \quad c_2(x) = \int \frac{y_1(x) f(x)}{W(x)} dx$$

**Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung:**

$$y_p(x) = -y_1(x) \int \frac{f(t) y_2(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int \frac{f(t) y_1(t)}{W(t)} dt$$



## Gesamte Lösung der inhomogenen DGL 2. Ordnung:

$$\begin{aligned} y_{inh}(x) &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_p(x) \\ &= c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) - y_1(x) \int \frac{f(t) y_2(t)}{W(t)} dt + y_2(x) \int \frac{f(t) y_1(t)}{W(t)} dt \end{aligned}$$

### Beispiel:

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = \sin(x)$$

### Lösung der homogenen DGL:

$$y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = 0$$

charakteristisches Polynom:

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -2$$

Die Lösung der homogenen DGL lautet:

$$y_H(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

### Berechnung der Wronski'schen Determinante:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{-2x} \\ -e^{-x} & -2e^{-2x} \end{vmatrix} = -2e^{-3x} + e^{-3x} = -e^{-3x}$$

### Lösung der inhomogenen DGL:

$$\begin{aligned} c_1(x) &= \int \frac{-\sin x \cdot e^{-2x}}{-e^{-3x}} dx = \int \sin x \cdot e^x dx \\ &= -\cos x \cdot e^x + \int \cos x \cdot e^x dx \\ &= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x - \int \sin x \cdot e^x dx \\ \Rightarrow \quad 2 \int \sin x \cdot e^x dx &= -\cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x \\ \Rightarrow \quad c_1(x) &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

Analog erhält man für  $c_2(x)$ :

$$\begin{aligned}c_2(x) &= \int \frac{\sin x \cdot e^{-x}}{-e^{-3x}} dx = \int -\sin x \cdot e^{2x} dx \\ &= e^{2x} \left( -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x \right)\end{aligned}$$

Die Partikuläre Lösung der inhomogenen DGL lautet:

$$\begin{aligned}y_p(x) &= c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x) \\ &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) e^{-x} + e^{2x} \left( -\frac{2}{5} \sin x + \frac{1}{5} \cos x \right) e^{-2x} \\ &= \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x\end{aligned}$$

Somit lautet die gesamte Lösung der inhomogenen DGL:

$$y_{inh}(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{10} \sin x - \frac{3}{10} \cos x$$

## 7.5 Näherungsweise Lösung durch Potenzreihenentwicklung

Nur in bestimmten Fällen sind Differentialgleichungen exakt lösbar. Näherungsweise kann eine Differentialgleichung durch den Ansatz mit einer Potenzreihe gelöst werden.

Ist die Lösung einer DGL in eine Potenzreihe entwickelbar, so erhält man die Koeffizienten der Potenzreihe durch:

1. Einsetzen von:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

2. Wiederholtes Differenzieren der DGL unter Verwendung von:

$$a_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$$

### Anmerkung: Die Taylorreihe

Entwicklung einer beliebigen Funktion in eine Potenzreihe (Taylorreihe):

Hat die Funktion  $f(x)$  stetige  $n$ -te Ableitungen, so kann man sie wie folgt darstellen:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

**Beispiel:**

$$(1+x)y''(x) + 2y(x) = x^2$$

mit dem Anfangswertproblem:  $y(0) = y'(0) = 1$

**Lösung der DGL durch Einsetzen von**  $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$

Ansatz:

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\ y'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} \\ y''(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} \end{aligned}$$

Einsetzen in die DGL ergibt:

$$\begin{aligned} (1+x) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + 2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= x^2 \\ \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} + \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} 2a_k x^k &= x^2 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^n &= x^2 \\ 2a_0 + 2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n+1) a_{n+1} + 2a_n) x^n &= x^2 \end{aligned}$$

Ein direkter Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} n=0 & \qquad \qquad \qquad 2a_0 + 2a_2 = 0 \\ n=1 & \qquad \qquad \qquad 6a_3 + 2a_2 + 2a_1 = 0 \\ n=2 & \qquad \qquad \qquad 12a_4 + 6a_3 + 2a_2 = 1 \\ n \geq 3 & \qquad (n+2)(n+1) a_{n+2} + n(n+1) a_{n+1} + 2a_n = 0 \end{aligned}$$

Unter Verwendung der Anfangsbedingungen (AWP)  $y(0) = y'(0) = 1$  erhält man:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 & \quad \rightarrow \quad a_0 = 1 \\ y'(0) = 1 & \quad \rightarrow \quad a_1 = 1 \\ 2 + 2a_2 = 0 & \quad \rightarrow \quad a_2 = -1 \\ 6a_3 - 2 + 2 = 0 & \quad \rightarrow \quad a_3 = 0 \\ 12a_4 - 2 = 1 & \quad \rightarrow \quad a_4 = \frac{1}{4} \\ \text{und } n \geq 3 & \quad \rightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-2a_n - n(n+1)a_{n+1}}{(n+2)(n+1)} \end{aligned}$$

Somit erhält man folgende Reihe als näherungsweise Lösung der DGL:

$$y(x) = 1 + x - x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{20}x^5 + \dots$$

### Lösung der DGL durch wiederholtes Differenzieren:

$$(1+x)y''(x) + 2y(x) = x^2$$

mit dem Anfangswertproblem:  $y(0) = y'(0) = 1$

Direktes Einsetzen in  $a_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$  ergibt:

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = 1$$

Einsetzen des AWP's in die DGL ergibt:

$$y''(0) + 2y(0) = 0$$

$$y''(0) = -2$$

Differenzieren der DGL ergibt:

$$y''(x) + (1+x)y'''(x) + 2y'(x) = 2x$$

Durch Einsetzen des AWP's  $y(0) = y'(0) = 1$  erhält man:

$$-2 + y'''(0) + 2 = 0$$

$$y'''(0) = 0$$

Weiteres Differenzieren der DGL ergibt:

$$y'''(x) + y''''(x) + (1+x)y^{(4)}(x) + 2y''(x) = 2$$

Durch Einsetzen des AWP's  $y(0) = y'(0) = 1$  erhält man:

$$y^{(4)}(x) - 4 = 2$$

$$y^{(4)}(x) = 6$$

Ein weiteres Differenzieren der DGL ergibt:

$$2y^{(4)}(x) + y^{(5)}(x) + (1+x)y^{(5)}(x) + 2y''''(x) = 0$$

Durch Einsetzen des AWP's  $y(0) = y'(0) = 1$  erhält man:

$$18 + y^{(5)} = 0$$

$$y^{(5)} = -18$$

Direktes Einsetzen in  $a_k = \frac{1}{k!} y^{(k)}(x_0)$  ergibt:

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = -1, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{4}, \quad a_5 = -\frac{3}{20}, \quad \dots$$

und somit:

$$y(x) = 1 + x - x^2 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{20}x^5 + \dots$$

## 8 Vorlesung: 6. 2. 2006

### Potentialreihen–Zerlegung: Die Taylor'sche Reihe

#### 8.1 Die Taylorentwicklung

Eine beliebige Funktion (stetig und  $(n + 1)$ -mal differenzierbar) kann als Potenzreihe dargestellt werden. Diese Reihendarstellung nennt man **Taylorreihe**:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + R_n$$

- $R_n$  ist das Lagrange'sche Restglied:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \vartheta \in [0, 1]$$

- Im Fall einer unendlichen Reihe ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ .
- Der Spezialfall  $x_0 = 0$  wird auch Mac-Laurin'sche Reihe genannt.

In der Physik ist es oft sinnvoll, eine komplizierte Funktion näherungsweise durch ein Polynom  $n$ -ter Ordnung zu beschreiben und die höheren Terme, unter Berücksichtigung der Fehlerabschätzung, zu vernachlässigen.

#### Beispiel: Polynom

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \quad \text{um } x_0 = -1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= (x_0^3 + 2x_0 + 1) + (3x_0^2 + 2)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(6x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}6(x - x_0)^3 \\ &= -2 + 5(x - x_0) - 3(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

## 8.2 Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen

### Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \quad \text{um } x_0 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= e^0 x^0 + \frac{1}{1!} e^0 x^1 + \frac{1}{2!} e^0 x^2 + \frac{1}{3!} e^0 x^3 + \frac{1}{4!} e^0 x^4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

### Trigonometrische Funktionen

$$\begin{array}{llll} f(x) &= \sin x & \text{um} & x_0 = 0 \\ f'(x) &= \cos x & & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & & f''(x_0) = 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & & f^{(3)}(x_0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & & f^{(4)}(x_0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x+a) = \sin a + x \cdot \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \frac{x^5 \cos a}{5!} + \dots + \frac{x^n \sin(a + \frac{n\pi}{2})}{n!}$$

### Hyperbolische Funktion

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

### 8.3 Beispiel aus der Festkörperphysik Wechselwirkung zwischen zwei Atomen

In der Natur ordnen sich die Atome zu regulären Kristallgitter an. Hierbei wirken zwischen den Atomen verschiedene anziehende und abstoßende Wechselwirkungen.

Anziehende Wechselwirkungen:

- Ionenbindung (z.B.  $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{NaCl}$ )
- kovalente Bindung
- metallische Bindung
- Van-der-Waals Bindung

Abstoßende Wechselwirkung

- Coulombabstoßung der negativ geladenen Atomhüllen

Bei einem bestimmten Abstand  $r_0$  sind die anziehenden und abstoßenden Kräfte im Gleichgewicht. Dies ist der Abstand der Atome im Kristallgitter.

Die anziehenden bzw. abstoßenden Wechselwirkungen können näherungsweise durch folgende Funktionen beschrieben werden:

$$\text{Anziehung} \quad : \quad -B \cdot r^{-n}$$

$$\text{Abstoßung} \quad : \quad A \cdot r^{-m}$$

Gesamtpotential:  $W_{pot} = Ar^{-m} - Br^{-n}$

Eine realistische Beschreibung liefert das **Lenard–Jones Potential**:

$$W_{pot} = -4\epsilon \left( \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} \right)$$

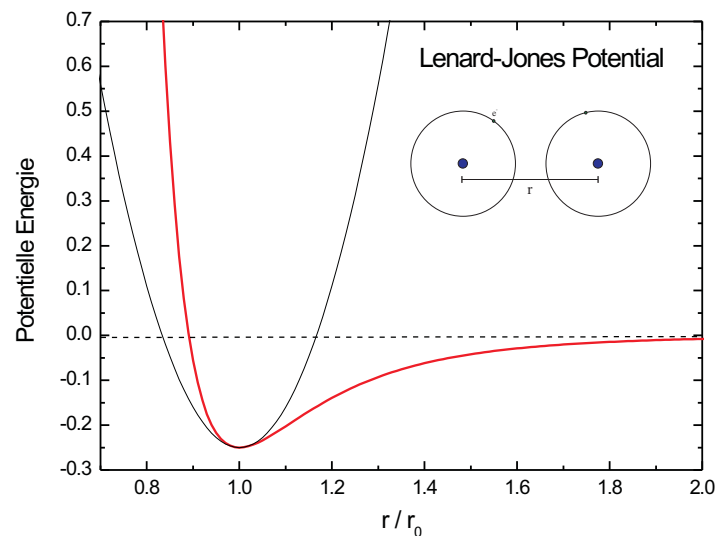


Abbildung 8.1: Verlauf der potentiellen Energie bei der Annäherung zweier Atome (Lenard–Jones Potential).

Der erste Term des Lenard–Jones Potentials beschreibt die Anziehung der Atome aufgrund der zwischenatomaren Kräfte, während der zweite Ausdruck die Abstoßung zwischen den abgeschlossenen Elektronenhüllen der Atome wiedergibt. Die beiden Konstanten  $\epsilon$  und  $\sigma$  sind empirische Parameter.

Nähern sich zwei Atome gegenseitig an, so wirken zunächst anziehende Wechselwirkungen. Bei einem bestimmten Abstand  $r_0$  herrscht Kräftegleichgewicht zwischen den anziehenden und den abstoßenden Wechselwirkungen. Dieser Gleichgewichtsabstand ist der Bindungsabstand der Atome im Molekül oder Festkörper. Nähert man die Atome weiter an, so nimmt die abstoßende Wechselwirkung dramatisch zu.

Kräftegleichgewicht herrscht, wenn die potentielle Energie im Minimum ist, d.h.  $W'_{pot} = 0$ .

$$W'_{pot}(r) = \frac{d W_{pot}(r)}{d r} = -4\epsilon \left( \frac{-6\sigma^6}{r^7} - \frac{-12\sigma^{12}}{r^{13}} \right) = 0$$

$$\implies r_0 = 2^{1/6} \cdot \sigma$$

Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach dem Abstand zwischen den Atomen lautet:

$$W''_{pot}(r) = \frac{d^2 W_{pot}(r)}{d r^2} = -4\epsilon \left( \frac{42\sigma^6}{r^8} - \frac{156\sigma^{12}}{r^{14}} \right)$$

Entwickelt man das Lenard–Jones Potential in eine Taylorreihe um den Gleichgewichtsabstand  $r_0$ , so erhält man:

$$W_{pot}(r) = W(r_0) + \underbrace{W'(r_0)}_{=0} (r - r_0) + \frac{1}{2} W''(r_0) (r - r_0)^2 + \dots$$

$$= W(r_0) + \frac{1}{2} W''(r_0) (r - r_0)^2 + \dots$$

Berücksichtigt man nur Terme bis zur 2. Ordnung, so spricht man von der **harmonischen Näherung**. Da z.B. die thermische Auslenkung der Atome aus der Gleichgewichtslage sehr klein ist, im Vergleich zu den atomaren Abständen, genügt es, die harmonische (quadratische) Näherung zu betrachten, um experimentell beobachtete Effekte wie Atomschwingungen erklären zu können.



## 9 Vorlesung: 13. 2. 2005

### Auswertung von Messungen – Fehlerrechnung

Ein wissenschaftliches Ergebnis gilt erst dann als gesichert, wenn es von einer zweiten Arbeitsgruppe experimentell bestätigt wurde. Um die Reproduzierbarkeit zu gewährleisten, muss das Experiment nachvollziehbar beschrieben werden und ein realistischer Messfehler angegeben werden.

Ursache für Messfehler sind:

- systematische Messabweichungen
- statistische Messabweichungen

#### 9.1 systematische Messabweichungen

Systematische Messfehler liegen dann vor, wenn:

- das Messgerät falsch kalibriert oder geeicht ist,
- die Probenqualität ungenügend ist.

Man unterscheidet zwischen:

- Eichen: Prüfung des Messgerätes durch die Eichbehörde + Prüfstempel.
- Kalibrieren: selber, z.B. mittels einer Referenzprobe (siehe **DIN1319**).

Ferner kann die Messung an sich das gesamte System beeinflussen und somit den ursprünglichen Wert verfälschen.

- Veränderung der Temperatur von Wasser im Fingerhut, falls ein zu großes Thermometer ursprünglich eine andere Temperatur besitzt.
- Verformung eines Gummischlauchs bei der Messung mit einer Schiebellehre.
- Erwärmung eines Drahts bei der Widerstandsmessung führt zu einer Erhöhung des Widerstands.

Beurteilung des systematischen Messfehlers:

Bei einem systematischen Messfehler ist das Messergebnis systematisch einseitig verfälscht.

#### 9.2 statistische Messabweichungen

Jede Einzelmessung (Stichprobe) liefert einen leicht unterschiedlichen Wert. Daher sollte man eine Messung öfters wiederholen, um einen genauen Mittelwert zu erhalten. Allerdings kann eine Messung nicht unendlich oft wiederholt werden. Daher ist eine genaue Abschätzung des Messfehlers (mittlere Abweichung einer Einzelmessung vom Mittelwert) nötig.

##### 9.2.1 arithmetischer Mittelwert

Ist  $\mu$  der wahre Wert der physikalischen Messgröße, so ist:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

der arithmetische Mittelwert aus  $n$  Einzelmessungen. Im Idealfall ist  $\bar{x} = \mu$ .

Hierbei gilt:

$$\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) = \sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0$$

### 9.2.2 Streuung der Messwerte um den Mittelwert

Die mittlere quadratische Abweichung der Einzelmessungen vom Mittelwert ist die **Streuung**, bzw. **Standardabweichung**:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Die **Varianz** ist  $v = s^2$ .

### 9.2.3 Standardabweichung des Mittelwertes

Um zu bestimmen, wie sicher der Mittelwert  $\bar{x}$  ist, betrachtet man die Standardabweichung des Mittelwertes:

$$m = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Diese Standardabweichung gibt den Bereich an, in dem der wahre Wert der physikalischen Größe liegen muss. Dieser Vertrauensbereich hängt von  $n$  ab und „verbessert“ sich mit der Zahl der Messungen ( $\propto \sqrt{n}$ ).

Eine hohe Zahl von Messungen verbessert die „Qualität“ des Messergebnisses.

### 9.2.4 Gaußsche Normalverteilung

Die Gaußsche Normalverteilung gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der die Ergebnisse der Einzelmessungen um den Mittelwert verteilt sind (Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion).

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\}$$

$\bar{x}$  ist der Mittelwert,

$\sigma$  ist die Standardabweichung (die Wendepunkte der Funktion liegen bei  $x = \bar{x} \pm \sigma$ ).

$f(x)dx$  ist die Wahrscheinlichkeit, mit der das Ergebnis einer Einzelmessung im Intervall  $dx$  liegt. Da das Gesamtereignis nur einmal eintreten kann, muss gelten:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 .$$

Ferner gilt:

$$\begin{aligned} \int_{-\sigma}^{\sigma} f(x) dx &= 0.6827 \quad \rightarrow \quad 68.27\% \\ \int_{-2\sigma}^{2\sigma} f(x) dx &= 0.9545 \quad \rightarrow \quad 95.45\% \\ \int_{-3\sigma}^{3\sigma} f(x) dx &= 0.9973 \quad \rightarrow \quad 99.73\% \end{aligned}$$

Die „International Standardization Organisation“ empfiehlt (**ISO 3534**), dass der Messfehler so angegeben werden sollte, dass 95 % der Messwerte in dem Bereich des Messfehlers liegen. Dies entspricht ungefähr einem Fehlerbereich von  $\pm 2\sigma$  um den Mittelwert.

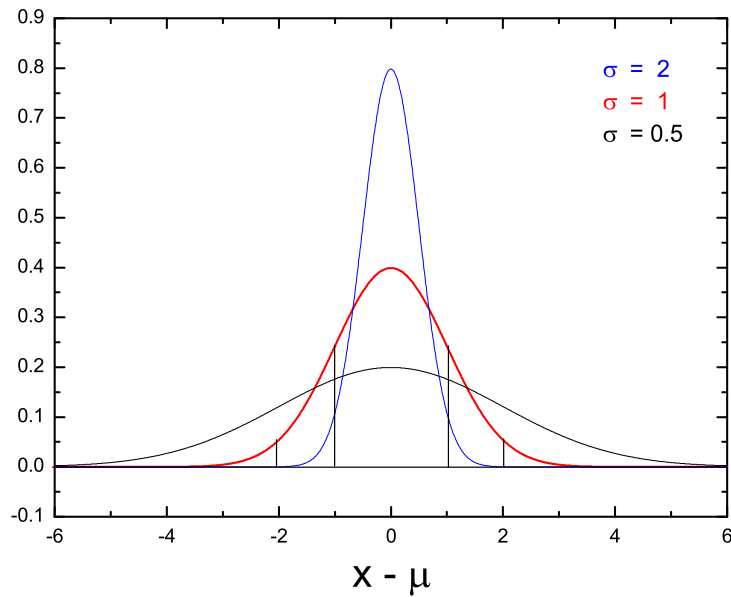


Abbildung 9.1: Gaußsche-Normalverteilung für verschiedene Standardabweichungen.

### 9.2.5 Halbwertsbreite

Die Halbwertsbreite ist die volle Breite der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion auf halber Höhe (FWHM = Full Width at Half Maximum).

Zur Vereinfachung der Berechnung wählen wir:  $\bar{x} = 0$ .

$$f(0) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$f_{\frac{1}{2}}(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

$$\exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} = \ln \frac{1}{2}$$

$$x^2 = 2 \ln 2 \cdot \sigma^2$$

$$x = \sqrt{2 \ln 2} \cdot \sigma$$

$$\text{FWHM} = 2 \sqrt{2 \ln 2} \cdot \sigma \approx 2.355 \cdot \sigma$$

### 9.2.6 Zur Standardabweichung:

Bei einer großen Zahl von Messungen kann man näherungsweise  $n - 1$  durch  $n$  ersetzen. In diesem Fall gilt:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2\bar{x} \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{i=1}^n \bar{x}^2 \right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 - 2n\bar{x}\bar{x} + n\bar{x}^2 \right)} \\ &= \sqrt{\overline{x^2} - \bar{x}^2}\end{aligned}$$

Diese Form ist bei der praktischen Berechnung der Standardabweichung sehr hilfreich, da man nur den Mittelwert von  $x_i$  und den Mittelwert von  $x_i^2$  benötigt.

### 9.3 Fehlerfortpflanzung

Bei den meisten physikalischen Größen müssen mehrere Einzelwerte getrennt gemessen werden. Jede dieser Einzelmessungen hat eine eigene Standardabweichung. Aus all diesen einzelnen Standardabweichungen läßt sich die gesamte Standardabweichung ermitteln. Dieses Verfahren nennt man **Gaußsches Fehlerfortpflanzungsgesetz**.

Als Beispiel kann man den Widerstand betrachten:

$$R = \varrho \cdot \frac{l}{A}$$

Hierbei ist  $\varrho$  der spezifische Widerstand und  $l$ ,  $A$  sind die Länge und der Durchmesser des Leiters.

$$\varrho = \frac{U}{I} \cdot \frac{\pi d^2}{4l}$$

Um den spezifischen Widerstand eines Leiters zu bestimmen, muss man  $U$ ,  $I$ ,  $d$  und  $l$  getrennt messen.

Für die verschiedenen Varianzen gilt:

$$\begin{aligned}s_{\varrho}^2 &= s_U^2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial U} \right)^2 + s_I^2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial I} \right)^2 + s_d^2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial d} \right)^2 + s_l^2 \left( \frac{\partial \varrho}{\partial l} \right)^2 \\ &= s_U^2 \left( \frac{\pi d^2}{4Il} \right)^2 + s_I^2 \left( -\frac{U\pi d^2}{4I^2 l} \right)^2 + s_d^2 \left( \frac{2U\pi d}{4Il} \right)^2 + s_l^2 \left( -\frac{U\pi d^2}{4Il^2} \right)^2 \\ &= s_U^2 \left( \frac{\varrho}{U} \right)^2 + s_I^2 \left( \frac{\varrho}{I} \right)^2 + s_d^2 \left( 2 \cdot \frac{\varrho}{d} \right)^2 + s_l^2 \left( \frac{\varrho}{l} \right)^2\end{aligned}$$

d.h. für die relativen Varianzen gilt:

$$\begin{aligned}(s_{\varrho}^2)_{rel.} &= \frac{s_{\varrho}^2}{\varrho^2} = \frac{s_U^2}{U^2} + \frac{s_I^2}{I^2} + 2^2 \cdot \frac{s_d^2}{d^2} + \frac{s_l^2}{l^2} \\ s_{\varrho,rel.} &\approx \frac{s_U}{U} + \frac{s_I}{I} + 2 \cdot \frac{s_d}{d} + \frac{s_l}{l}\end{aligned}$$

## 9.4 Lineare Regression

Bei vielen physikalischen Größen besteht ein linearer Zusammenhang zwischen zwei Messgrößen. Ein Beispiel ist der elektrische Widerstand  $R = U/I$ . Zur Bestimmung des Widerstandes kann man eine Messreihe durchführen, bei der z.B. die Stromstärke  $I$  variiert wird und die jeweilige Spannung gemessen wird ( $U = R \cdot I$ ). Der Widerstand läßt sich aus dem linearen Zusammenhang errechnen.

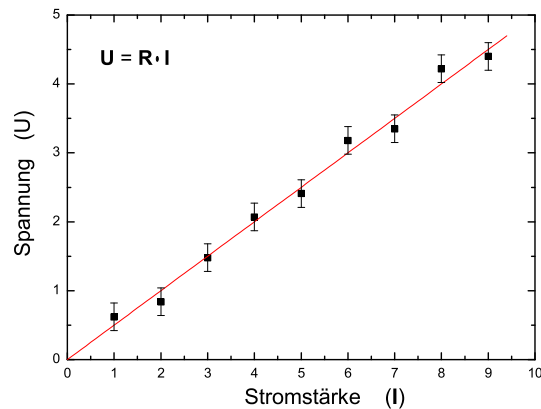


Abbildung 9.2.: Lineare Regression.

Für einen einzelnen Messpunkt gilt:

$$y_i = a + b x_i$$

Ziel ist es, die mittlere quadratische Abweichung  $S$  der Messpunkte von dieser Geraden zu minimieren:

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i)^2 = \text{Minimal}$$

**Achsen-Abschnitt  $a$  :**

$$\frac{\partial S}{\partial a} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - a - b x_i) = 0$$

$$\bar{y} = a + b \bar{x}$$

**Steigung  $b$  :**

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - a - b x_i) = 0$$

$$\sum x_i y_i = a \sum x_i + b \sum x_i^2$$

durch einsetzen von  $\bar{y} = a + b \bar{x}$  erhält man:

$$b = \frac{\sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i}{\sum x_i^2 - \bar{x} \sum x_i}$$

Durch geeignetes Umformen kann man auch bei komplizierteren physikalischen Formeln einen linearen Zusammenhang herstellen. So kann man z.B. die radioaktive Zerfallszeit  $\tau$  (radioaktiver Zerfall:  $I(t) = I_0 e^{-\tau t}$ ) durch logarithmisches Auftragen bestimmen.