

Inhaltsverzeichnis

1	Vorlesungen: 28. 4. 2006 bis 12. 6. 2006	
	Vektor–Analysis	2
1.1	Skalarfeld, Vektorfeld	2
1.2	Differentiation eines Skalarfeldes: Gradient	3
1.3	Das Potential	4
1.4	Differentiation eines Vektorfeldes: Divergenz	9
1.5	Differentiation eines Vektorfeldes: Rotation	12
1.6	Rechenregeln für den Nabla–Operator	14
1.7	Divergenz, Gradient und Rotation in Kugelkoordinaten	17
1.8	Beispiele zur Vektor–Analysis:	19
1.8.1	Das Potential eines Dipolfeldes	19
1.8.2	Das Biot–Savartsche Gesetz	22
1.8.3	Das Kraftgesetz der Elektrodynamik	25
1.8.4	Das Vektorpotential	27
1.8.5	Die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik	28
2	Vorlesung: 12. 6. bis 19. 6. 2006	
	Linien– und Flächenintegrale	29
2.1	Motivation: Das Potential	29
2.2	Linienintegrale	29
2.3	Dreidimensionale Linienintegrale	33
2.4	Oberflächenintegrale	34
2.5	Mantel eines Rotationskörpers	36
3	Vorlesung: 3. 7. 2006	
	Potentialreihen–Zerlegung: Die Taylor’sche Reihe	37
3.1	Die Taylorentwicklung	37
3.2	Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen	38
3.3	Beispiel aus der Festkörperphysik Wechselwirkung zwischen zwei Atomen	39
4	Vorlesungen: 3. 7. 2006 und 17. 7. 2006	
	Fouriertransformation	41
4.1	Reihenentwicklung in trigonometrische Funktionen	41
4.2	Fourierreihen einiger spezieller Funktionen	44
4.3	Fourierentwicklung in komplexer Schreibweise	44
4.4	Die Dirac’sche δ -Funktion:	45
4.5	Fourierintegrale	46
4.6	Der Faltungssatz	48
4.7	Anwendungsbeispiele	48
4.7.1	Hochfrequenzfilter — Wiener-Filter	48
4.7.2	Fourieroptik	49

1 Vorlesungen: 28. 4. 2006 bis 12. 6. 2006

Vektor–Analysis

Vektorwertige Funktionen – Vektoranalysis

Darstellung: Kurve in einer Ebene, Fläche im Raum

explizite (kartesische) Darstellung	$y = f(x),$	$a \leq x \leq b$
implizite (kartesische) Darstellung	$F(x, y) = 0,$	
Polarkoordinatendarstellung	$r = r(\varphi),$	$\varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$
Parameterdarstellung	$\vec{x} = \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$	$t_0 \leq t \leq t_1$

1.1 Skalarfeld, Vektorfeld

In der Vektoranalysis fasst man Vektoren als Funktionen von Veränderlichen auf und wendet die Methoden der Differential– und Integralrechnung an.

- **Skalarfeld**

Eine skalare Funktion des Raumes $f(x, y, z)$ nennt man ein Skalarfeld, wenn durch sie jedem Punkt $P(x, y, z)$, bzw. jedem Ortsvektor \vec{x} ein Skalar $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, x_3)$ zugeordnet wird.

Beispiele sind: Temperaturverteilung, Druckverteilung (Wetterkarte), inhomogene Dichte eines Körpers, Potential, Höhenunterschiede im Gebirge.

Die Flächen oder Linien mit $f(x, y, z) = \text{const.}$ heißen Niveauflächen bzw. Äquipotentialflächen/Linien (Höhenlinien, Isotherme, Isobare, ...). Die Funktion $f(x, y, z)$ ändert sich umso schneller, je dichter die Niveauflächen liegen.

- **Vektorfeld**

Wird durch die Funktion $\vec{v}(\vec{r}) = \vec{v}(x, y, z)$ jedem Raumpunkt ein Vektor \vec{v} zugeordnet, so heißt diese Funktion: Vektorfeld.

Beispiele sind: Strömungsfelder, Kraftfelder, elektrisches Feld, magnetisches Feld, Windangabe auf der Wetterkarte, ...

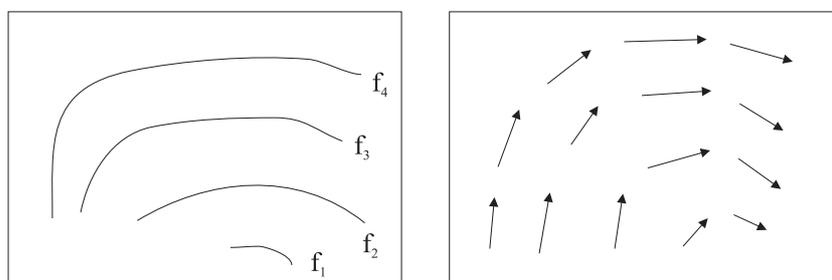


Abbildung 1.1: Skalarfeld (links) und Vektorfeld (rechts).

1.2 Differentiation eines Skalarfeldes: Gradient

Die Differentiation erfolgt komponentenweise, **partielle Differentiation** (Partial = ∂). Es gelten die üblichen Rechenregeln für Vektoren.

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}$$

Gradient

Die Änderung $df(x, y, z)$, welche die Funktion beim Fortschreiten um $d\vec{r} = dx + dy + dz$ erfährt, ist:

$$\text{grad}f(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Für die Änderung $df(x, y, z)$ in eine beliebige Richtung $d\vec{r}$ erhält man $df = \text{grad}f \cdot d\vec{r}$. Wählt man die Richtung $d\vec{r}$ so, dass man sich auf einer Niveaulfläche bewegt ($f(x, y, z) = \text{const.}$), so ist $df(x, y, z) = 0$:

$$df = \text{grad}f \cdot d\vec{r} = 0$$

Laut den Regeln für das Vektorprodukt gilt:

Der Gradient von $f(x, y, z)$ steht senkrecht auf der entsprechenden Niveaulfläche von $f(x, y, z)$. Ferner zeigt der Gradient in die Richtung des stärksten Anstiegs und ist umso größer, je dichter die benachbarten Niveaulflächen (Höhenlinien) liegen.

Die Ableitung eines Skalarfeldes (Gradienten von $f(x, y, z)$) ergibt ein Vektorfeld.

Ein Vektorfeld ist jedoch nicht zwingend der Gradient eines Skalarfeldes. Falls dies doch der Fall ist, so spricht man von einem konservativen Vektorfeld bzw. von einem Potentialfeld. Das zugehörige Skalarfeld ist das Potential.

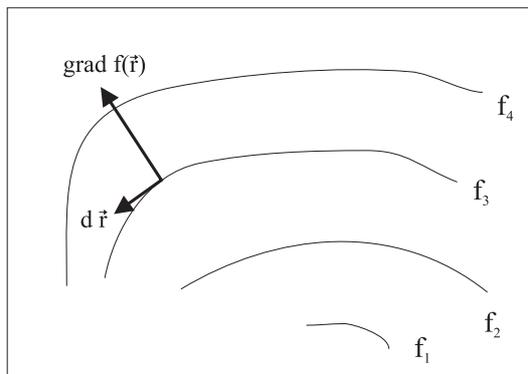


Abbildung 1.2: Niveaulflächen und Gradient.

Richtungsableitung

Die Richtungsableitung ist die Ableitung eines Skalarfeldes in eine bestimmte Richtung im Raum (entlang des Vektors \vec{a}). Diese Ableitung schließt mit dem Gradienten einen bestimmten Winkel φ ein. Somit gilt für die Richtungsableitung:

$$df(x, y, z) = \text{grad}f \cdot d\vec{a} = |\text{grad}f| \cdot |d\vec{a}| \cos \varphi$$

Die Ableitung von $f(x, y, z)$ an der Stelle \vec{x}_0 in eine beliebige Richtung entspricht der Projektion des Gradienten von f auf den Vektor \vec{a} .

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}(\vec{x}_0) = \text{grad}f(\vec{x}_0) \cdot \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Das Ergebnis der Richtungsableitung ist eine Zahl (Skalar). Sie gibt die Steigung (das Gefälle) vom Ort \vec{x}_0 aus in Richtung \vec{a} an.

1.3 Das Potential

- Der Gradient eines Skalarfeldes ergibt ein Vektorfeld.
- Nicht jedes Vektorfeld ist zwingend der Gradient eines Skalarfeldes.

$$\vec{v}(\vec{x}) \stackrel{?}{\iff} \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Falls dies doch der Fall sein sollte, so ist das Vektorfeld **konservativ** (Vektorpotential), und das zugehörige Skalarfeld ist das **Potential**.

Für das Vektorpotential gelten folgende wichtige Eigenschaften:

1. Das Kurvenintegral über ein Vektorpotential ist unabhängig vom Integrationsweg und ergibt sich somit direkt aus der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Integration.
2. Folglich muss das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwinden:

$$\oint \vec{v}(\vec{x}) \, d\vec{r} = 0$$

3. Ferner muss gelten:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}$$

4. Somit muss die Rotation eines Potentialfeldes verschwinden: (Siehe Kapitel 1.6)

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = 0$$

Beispiel:

Frage: Ist das folgende Vektorfeld konservativ?

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 + yz e^{xyz} \\ e^y + xz e^{xyz} \\ -\cos z + xy e^{xyz} \end{pmatrix}$$

Hierzu integrieren wir zeilenweise:

$$\begin{aligned} \int v_x dx &= \int (1 + yz e^{xyz}) dx = x + e^{xyz} \\ \int v_y dy &= \int (e^y + xz e^{xyz}) dy = e^y + e^{xyz} \\ \int v_z dz &= \int (-\cos z + xy e^{xyz}) dz = -\sin z + e^{xyz} \end{aligned}$$

Durch direkten Vergleich erhält man:

$$f(x, y, z) = x + e^y - \sin z + e^{xyz}$$

Das Vektorfeld ist konservativ und $f(x, y, z)$ ist das zugehörige Potential.

Nun überprüfen wir, ob $\frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial y} &= z e^{xyz} + yz xz e^{xyz} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} &= z e^{xyz} + xz yz e^{xyz} \end{aligned}$$

Die beiden partiellen Ableitungen sind identisch. Dies gilt auch für alle anderen Kombinationen der Ableitungen von $\vec{v}(\vec{r})$ nach (x, y, z) .

Somit kann für dieses Beispiel gezeigt werden, dass:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix} = 0$$

Wie später gezeigt wird, entspricht dies der Rotation von $\vec{v}(\vec{x})$. Im Fall eines konservativen Vektorpotentials verschwindet die Rotation:

$$\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = \nabla \times \vec{v} = 0$$

Das elektrische Potential

Das Coulombgesetz lautet:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \cdot \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Für das elektrische Feld gilt:

$$\vec{F} = q_1 \cdot \vec{E} \quad \text{mit} \quad \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Nun betrachten wir den Fall, dass sich eine Ladung Q (Beobachterladung) im Bereich einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ befindet

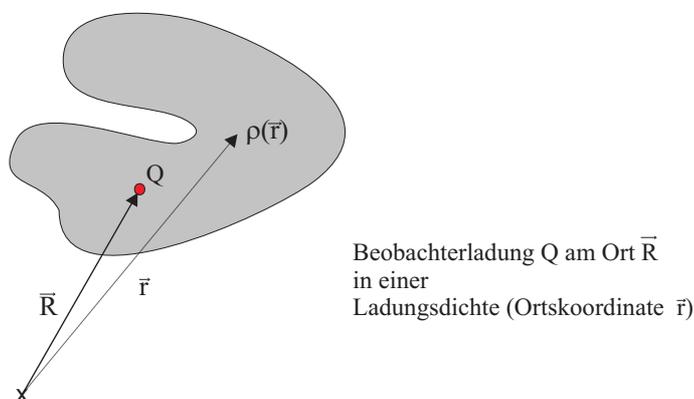


Abbildung 1.3: Beobachterladung Q am Ort \vec{R} innerhalb einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$.

Der Ort in der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ wird angegeben durch \vec{r} .
Für die Ladungsverteilung gilt:

$$\int \rho(\vec{r}) dV = q$$

Hierbei ist q die gesamte Ladung der Ladungsverteilung.

Es wirkt folgende Kraft auf die Beobachterladung Q :

$$\vec{F}(\vec{R}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Somit ist das elektrische Feld, dass von der Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ausgeht am Ort \vec{R} :

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \rho(\vec{r}) dV$$

Um zu klären, ob das elektrische Feld ein Potential besitzt, betrachten wir folgende Ableitung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} &= \frac{\partial}{\partial X} \frac{1}{\sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(X-x)}{((X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{(X-x)}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \end{aligned}$$

Analoge Ausdrücke erhält man für die partiellen Ableitungen nach Y und Z . Somit ist:

$$\text{grad} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} = -\frac{(\vec{R} - \vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|^3}$$

Folglich gilt für das elektrische Feld:

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{R}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \varrho(\vec{r}) dV \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int -\text{grad} \frac{1}{|\vec{R} - \vec{r}|} \varrho(\vec{r}) dV \\ &= -\text{grad} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV \end{aligned}$$

Das elektrische Feld ist ein **konservatives** Vektorfeld und das zugehörige elektrische Potential lautet:

$$\vec{E}(\vec{R}) = -\text{grad} \phi(\vec{R}) \quad ; \quad \phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV$$

Das elektrische Feld lässt sich durch den Gradienten eines Skalarfeldes, dem elektrischen Potential, konstruieren. Die Einheit des elektrischen Potentials ist: **Volt**.

Es gelten folgende wichtige Eigenschaften für das elektrische Feld:

- Das Kurvenintegral über das elektrische Feld ist unabhängig vom Integrationsweg.
- Das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwindet:

$$\oint \vec{E}(\vec{R}) d\vec{R} = 0$$

- Das elektrische Feld ist wirbelfrei:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{R}) = 0$$

Beachte: Dies gilt nur im Falle zeitlich konstanter magnetischer Felder.
(Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik!)

Berechnung der Rotation des elektrischen Feldes:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \varrho(\vec{r}) dV$$

Wie im nächsten Kapitel gezeigt wird, lautet die Rotation:

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \varrho(\vec{r}) \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial Y} \frac{Z-z}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} - \frac{\partial}{\partial Z} \frac{Y-y}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial Z} \frac{X-x}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} - \frac{\partial}{\partial X} \frac{Z-z}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \\ \frac{\partial}{\partial X} \frac{Y-y}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} - \frac{\partial}{\partial Y} \frac{X-x}{|\vec{R}-\vec{r}|^3} \end{pmatrix} dV$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial Y} \frac{(Z-z)}{((X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{2(Z-z)(Y-y)}{((X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2)^{5/2}} \\ & \frac{\partial}{\partial Z} \frac{(Y-y)}{((X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{3}{2} \frac{2(Y-y)(Z-z)}{((X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2)^{5/2}} \end{aligned}$$

Analoge Ergebnisse erhält man für die Ableitungen nach den anderen Koordinaten. Somit kann gezeigt werden, dass in der Elektrostatik die Rotation des elektrischen Feldes in der Tat verschwindet. Das elektrische Feld ist wirbelfrei (bei konstantem magnetischen Feld).

$$\text{rot } \vec{E}(\vec{R}) = 0$$

1.4 Differentiation eines Vektorfeldes: Divergenz

Der Nabla-Operator

Der Nabla-Operator ∇ ist wie folgt definiert:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{e}_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ein Operator (Funktional) „wirkt“ auf eine Funktion.

Divergenz

Die Divergenz ist die Ableitung eines Vektorfeldes. Als Ergebnis erhält man ein Skalarfeld:

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \nabla \cdot \vec{v}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Anschaulich:

Ein Vektorfeld ist z.B. ein Strömungsfeld. Somit beschreibt die Ableitung (Divergenz) des Vektorfeldes die Änderung in der Strömung, d.h. die Existenz einer Quelle oder Senke im Vektorfeld.

Der Satz von Gauß

Wir betrachten die Strömung einer Flüssigkeit durch einen offenen Kasten (in x -Richtung).

Das Strömungsfeld (Vektorfeld) lautet:

$$\begin{aligned} \text{Strömung:} & \quad \vec{v}(\vec{r}) = v_x \\ \text{Masse der strömenden Flüssigkeit:} & \quad m = \rho \cdot v_x \end{aligned}$$

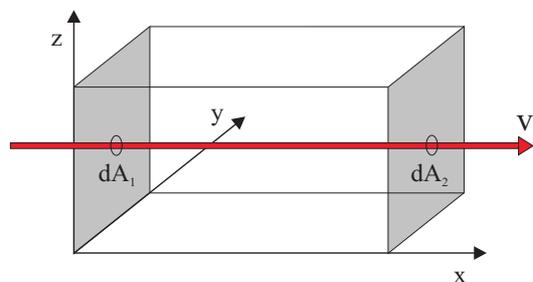


Abbildung 1.4: Strömung einer Flüssigkeit durch einen offenen Kasten.

- In einer bestimmten Zeit tritt eine gewisse Flüssigkeitsmenge durch die Fläche dA_1 in den Kasten ein.

$$\text{Volumen} \quad v_x dA_1 = v_x \cdot dy dz$$

$$\text{Masse} \quad \rho v_x dA_1 = \rho v_x \cdot dy dz$$

- Durch die Fläche dA_2 tritt folgende Flüssigkeitsmenge wieder aus:

$$v_x(x+dx, y, z) dy dz = \left[v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx \right] dy dz$$

- Die Differenz ergibt den Masseverlust bzw. Zugewinn innerhalb des Kastens:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} dx dy dz$$

- Für beliebige Strömungen, d.h. für alle drei Raumrichtungen gilt:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dx dy dz = \text{div } \vec{v}(\vec{r}) dV$$

- Somit gilt insgesamt:

$$\int_V \text{div } \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dF$$

Satz von Gauß

$$\int_V \text{div } \vec{v}(\vec{r}) dV = \int_F \vec{v}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dF$$

Die Änderung in einem Strömungsfeld $\int \text{div } \vec{v}(\vec{r}) dV$ entspricht der Strömung senkrecht durch die Randflächen.

Fließt bei einem beidseitig offenen Kasten genauso viel Flüssigkeit in den Kasten hinein wie aus ihm heraus, so ist die Divergenz (Ableitung) dieser Strömung gleich Null:

div $\vec{v} > 0$ Fließt mehr Flüssigkeit aus dem Kasten heraus als in ihn hinein, so handelt es sich um eine **Quelle**.

div $\vec{v} < 0$ Im umgekehrten Fall ist der Kasten eine **Senke**.

div $\vec{v} = 0$ kein Masseverlust oder Zugewinn: das Strömungsfeld ist quellen- bzw. senkenfrei.

Beispiel: Elektrisches Feld, das von einer Punktladung ausgeht

Das elektrische Feld am Ort \vec{R} lautet:

$$\vec{E}(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{R} - \vec{r}}{|\vec{R} - \vec{r}|^3} \varrho(\vec{r}) dV$$

Für das elektrische Potential gilt:

$$\vec{E}(\vec{R}) = -\text{grad } \phi(\vec{R}) \quad , \quad \text{wobei:} \quad \phi(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\varrho(\vec{r})}{|\vec{R} - \vec{r}|} dV$$

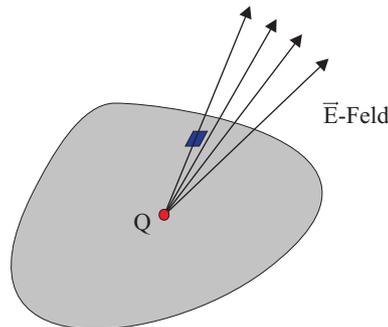


Abbildung 1.5: Elektrisches Feld, das von einer Punktladung Q ausgeht.

Fluss der elektrischen Feldlinien durch die Oberfläche:

$$\vec{E} \cdot \vec{n} dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \cdot \vec{n} dF$$

$$\text{mit:} \quad \vec{n} dF = \cos \Theta dF = r^2 d\Omega$$

$$\vec{E} \cdot \vec{n} dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot \cos \Theta dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \cdot r^2 d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q d\Omega$$

$$\oint_O \vec{E} \cdot \vec{n} dF = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_O Q d\Omega = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot Q \cdot 4\pi = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Im Fall mehrerer Ladungen bzw. einer Ladungsdichte gilt:

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dF = \frac{1}{\epsilon_0} \int \varrho(\vec{r}) dV$$

Mit Hilfe des Satzes von Gauß erhält man:

$$\int \text{div } \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \varrho(\vec{r}) dV$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

Positive Ladungen im Raum sind **Quellen** des elektrischen Feldes,
negative Ladungen sind **Senken** des elektrischen Feldes.

1.5 Differentiation eines Vektorfeldes: Rotation

Die Rotation ist eine Differentialoperation, bei der ein Vektorfeld einem anderen Vektorfeld zugeordnet wird:

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Die Rotation beschreibt die Wirbel in dem Vektorfeld.

Die Richtung von $\operatorname{rot} \vec{v}$ entspricht der Drehachse, der Betrag von $\operatorname{rot} \vec{v}$ gibt die Drehgeschwindigkeit an und das Vorzeichen von $\operatorname{rot} \vec{v}$ steht für den Drehsinn (links- oder rechtsdrehend).

Anschauliches Beispiel: Schaufelrad in einem Fluss

Zur anschaulichen Darstellung kann man die Strömung in einem Fluss betrachten. Hält man ein Schaufelrad flach in die Strömung, so wird es sich entweder rechts- oder links-herum drehen. Die Rotation $\operatorname{rot} \vec{v}$ beschreibt die Drehung des Schaufelrades:

- $\operatorname{rot} \vec{v}$ zeigt in Richtung des Drehvektors (Achse des Schaufelrades),
- $|\operatorname{rot} \vec{v}|$ ist ein Maß für die Drehgeschwindigkeit.
- Das Vorzeichen von $\operatorname{rot} \vec{v}$ gibt die Drehrichtung an (links- oder rechtsdrehend).

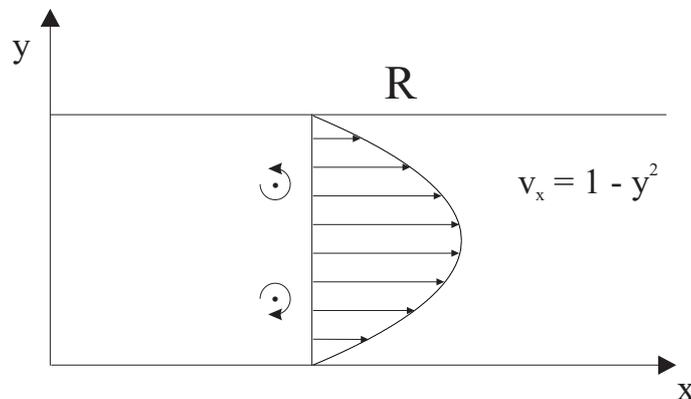


Abbildung 1.6: Strömungsprofil in einem Fluss.

Für das Strömungsprofil in einem Fluss gilt näherungsweise folgende Formel

$$v(\vec{r}) = \frac{\Delta P}{4l\eta}(R^2 - r^2) = \frac{g \cdot \varrho}{4\eta}(R^2 - r^2)$$

Bei der Strömung in einem Rohr ist ΔP die Druckdifferenz nach einer gewissen Länge l . η ist die Viskosität und R ist der Durchmesser (siehe Vorlesung im Wintersemester: Gesetz von Hagen–Poiseuille).

Wir verwenden diese Formel näherungsweise, um das Strömungsprofil in einem Fluss zu beschreiben. Hier steht der Radius r für den Abstand vom Flussufer.

Zur Vereinfachung ignorieren wir den Vorfaktor und setzen den Durchmesser des Flusses gleich eins. In diesem Fall lautet das Strömungsprofil für eine Strömung in x-Richtung:

$$\vec{v}(r) = \begin{pmatrix} 1 - y^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d.h. ein Teilchen mit der Entfernung y_0 vom Ufer hat die Geschwindigkeit: $v(y_0) = (1 - y_0^2, 0, 0)$. Die Bewegung erfolgt in x-Richtung.

Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x} (1 - y^2) + \frac{\partial}{\partial y} 0 + \frac{\partial}{\partial z} 0 = 0$$

Im Fall gleichmäßiger Strömung besitzt der Fluss weder Quelle noch Senke.

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{\partial}{\partial y} (1 - y^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix}$$

Der resultierende Vektor $\operatorname{rot} \vec{v}$ (Drehachse des Wirbels) zeigt in z -Richtung und steht somit senkrecht zur xy -Ebene (Zeichenebene). Seine Länge gibt die Stärke der Rotation an und sein Vorzeichen den Drehsinn.

$\operatorname{rot} \vec{v} > 0$	rechtsdrehend (Vektor nach unten)
$\operatorname{rot} \vec{v} < 0$	linksdrehend (Vektor nach oben)
$\operatorname{rot} \vec{v} = 0$	wirbelfrei

Der Satz von Stokes

In einer geschlossenen, aber nicht notwendigerweise ebenen Kurve C sei ein Flächenstück S aufgespannt (S sei stetig und differenzierbar). Der positive Durchlaufsinne von C sei derjenige, bei dem S zur linken Seite liegt, wenn man S von der durch \vec{n} bezeichneten Seite aus betrachtet.

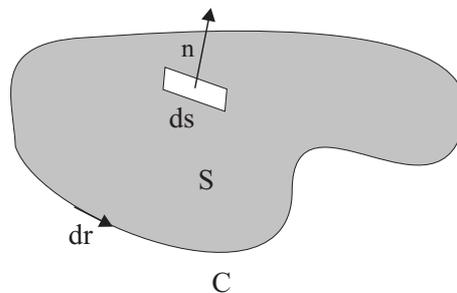


Abbildung 1.7: Satz von Stokes. Wirbelfeld in einer geschlossenen Fläche.

$$\oint_C \vec{v}(\vec{r}) \, dr = \iint_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v}(\vec{r})) \, d\sigma$$

Das Linienintegral um die Fläche entspricht dem Flächenintegral (Summe!) der Wirbel auf dieser Fläche. Es genügt, die „Strömung“ am Rand zu kennen, um das Wirbelfeld der gesamten Fläche bestimmen zu können.

Das Flächenintegral $\iint_S (\vec{n} \cdot \text{rot } \vec{v}) \, d\sigma$ hängt nur vom Verlauf der Randkurve, nicht aber von der Gestalt der eingespannten Fläche ab.

Das Umlaufintegral $\oint_C \vec{v} \, d\vec{r}$ nennt man auch die **Zirkulation** von \vec{v} längs der Kurve C . Die Zirkulation gibt die Drehrichtung und die Drehgeschwindigkeit an.

1.6 Rechenregeln für den Nabla-Operator

Für die Rechenregeln von *grad*, *div* und *rot*, d.h. dem Nabla-Operator, gelten im Allgemeinen die bekannten Vektorrechenregeln kombiniert mit den Regeln der Ableitung.

Die Operationen *grad*, *div* und *rot* sind linear

$$\begin{aligned} \text{grad } (f + g) &= \text{grad } f + \text{grad } g & \text{grad } \lambda \cdot f &= \lambda \cdot \text{grad } f \\ \text{div } (\vec{u} + \vec{v}) &= \text{div } \vec{u} + \text{div } \vec{v} & \text{div } \lambda \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot \text{div } \vec{v} \\ \text{rot } (\vec{u} + \vec{v}) &= \text{rot } \vec{u} + \text{rot } \vec{v} & \text{rot } \lambda \cdot \vec{v} &= \lambda \cdot \text{rot } \vec{v} \end{aligned}$$

bzw. in der Schreibweise des Nabla-Operators:

$$\begin{aligned} \text{grad } (a \cdot f + b \cdot g) &= \nabla(a \cdot f + b \cdot g) = a\nabla f + b\nabla g \\ \text{div } (a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) &= \nabla(a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) = a\nabla\vec{u} + b\nabla\vec{v} \\ \text{rot } (a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) &= \nabla \times (a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}) = a(\nabla \times \vec{u}) + b(\nabla \times \vec{v}) \end{aligned}$$

Produktregeln:

$$\begin{aligned} \text{grad } (f \cdot g) &= f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f \\ \text{div } (f \cdot \vec{v}) &= f \cdot \text{div } \vec{v} + (\text{grad } f) \cdot \vec{v} \\ \text{rot } (f \cdot \vec{v}) &= f \cdot \text{rot } \vec{v} + (\text{grad } f) \times \vec{v} \\ \text{div } (\vec{u} \times \vec{v}) &= -\vec{u} \text{ rot } \vec{v} + \vec{v} \text{ rot } \vec{u} \end{aligned}$$

Im Besonderen gilt:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) &= \nabla \times (\nabla f) = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) &= \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \\ \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) &= \nabla \nabla f = \Delta f \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) &= \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}\end{aligned}$$

Die oben dargestellte zweifache Ableitung ($\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$) ist der **Laplace-Operator**.

$$\Delta f = \nabla \nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Herleitung einiger wichtiger Rechenregeln:

- $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = 0$

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$$

Bei Vektoren gilt:

$$\vec{a}(\vec{a} \times \vec{b}) = 0 \quad \text{da} \quad \vec{a} \perp (\vec{a} \times \vec{b})$$

Divergenz: Änderung im Strömungsfeld, zeigt in Strömungsrichtung

Rotation: Wirbelfeld, Drehachse ist senkrecht zur Strömung

Das Skalarprodukt zweier Vektoren, die aufeinander senkrecht stehen, ergibt Null.

- $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \nabla \times (\nabla f) = 0$$

Bei Vektoren gilt:

$$\vec{a} \times \lambda \vec{a} = 0, \quad \text{da} \quad \vec{a} \parallel \lambda \vec{a}$$

Bei zwei parallelen Vektoren ergibt das Kreuzprodukt Null.

- $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) - \Delta \vec{v}$$

Bei Vektoren gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

somit gilt:

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \nabla \times \nabla \times \vec{v} = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - (\nabla \nabla) \vec{v}$$

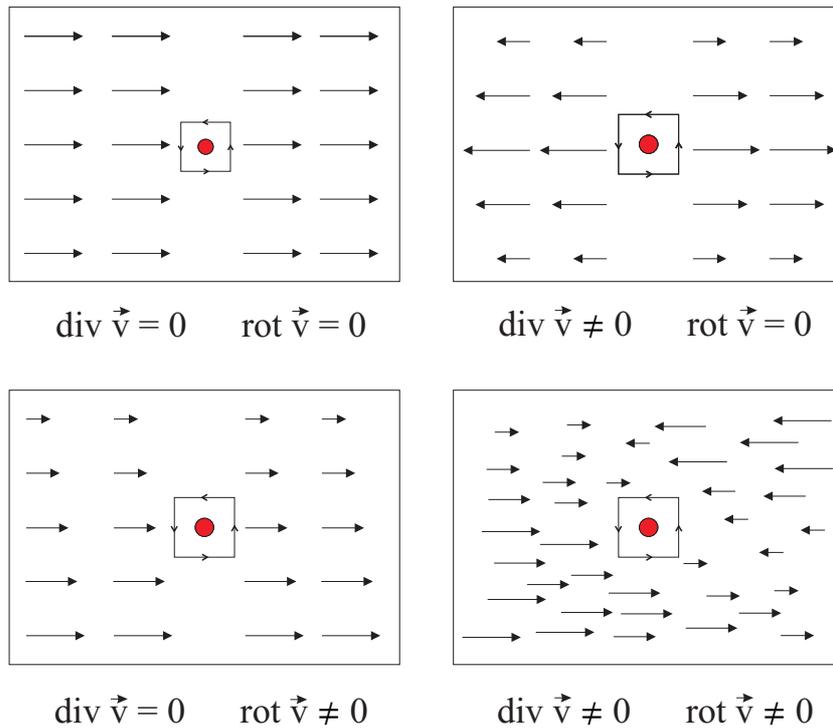


Abbildung 1.8: Divergenz und Rotation verschiedener Vektorfelder.

1. $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} = 0$

Im ersten Beispiel liegt eine vollständig gleichmäßige Strömung vor. Setzt man sich an den Beobachterpunkt, so stellt man fest, dass genauso viel in den Kasten hineinfließt wie aus ihm heraus ($\text{div } \vec{v} = 0$). Ferner spürt der Beobachter kein Drehmoment ($\text{rot } \vec{v} = 0$).

2. $\text{div } \vec{v} \neq 0$, $\text{rot } \vec{v} = 0$

Im zweiten Beispiel liegt eindeutig eine Quelle vor. Am Ort des Beobachters fließt mehr heraus ($\text{div } \vec{v} > 0$). Dennoch spürt der Beobachter kein Drehmoment ($\text{rot } \vec{v} = 0$).

3. $\text{div } \vec{v} = 0$, $\text{rot } \vec{v} \neq 0$

Im dritten Beispiel ist zwar die Strömung konstant, d.h. es liegt weder eine Quelle noch eine Senke vor ($\text{div } \vec{v} = 0$). Dennoch spürt der Beobachter ein Drehmoment der Strömung (siehe Beispiel: Strömung in einem Fluss).

4. $\text{div } \vec{v} \neq 0$, $\text{rot } \vec{v} \neq 0$

Das vierte Beispiel stellt denn allgemeinen Fall eines völlig willkürlichen Vektorfeldes dar. Es ist klar zu erkennen, dass die „langen“ Vektorpfeile überwiegen. Somit liegt eine Quelle vor ($\text{div } \vec{v} > 0$). Außerdem spürt der Beobachter ein Drehmoment gegen den Uhrzeigersinn. Es liegt ein Wirbel vor ($\text{rot } \vec{v} > 0$).

1.7 Divergenz, Gradient und Rotation in Kugelkoordinaten

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \varphi \\y &= r \sin \theta \sin \varphi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2; \quad \cot \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

Bei der Volumenintegration in Kugelkoordinaten gilt:

$$\text{Volumenintegral:} \quad dV = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

Die Einheitsvektoren der Kugelkoordinaten lauten:

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix} \quad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Gradient eines Skalarfeldes lässt sich mit den Kugelkoordinaten wie folgt berechnen:

$$\text{grad } f(r, \varphi, \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mid \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mid \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

Herleitung

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r} = \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r} = \sin \theta \cos \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r} = \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r} = \sin \theta \sin \varphi$$

$$\frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r} = \frac{r \cos \theta}{r} = \cos \theta$$

Das Ergebnis der drei Ableitungen von r nach x , y und z entspricht genau dem Einheitsvektor \vec{e}_r .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(-\frac{y}{x^2} \right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{-r \sin \theta \sin \varphi}{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} (-\sin \varphi)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial y} = \frac{1}{1 + (\frac{y}{x})^2} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{x}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi} = \frac{1}{r \sin \theta} (\cos \varphi)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \arctan \frac{y}{x}}{\partial z} = 0$$

Die drei Ableitungen von φ nach x , y und z ergeben den Einheitsvektor \vec{e}_φ mit einem Vorfaktor $\frac{1}{r \sin \theta}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{\partial \operatorname{arccot} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{zx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{x}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{r^2} \cot \theta = \frac{r \sin \theta \cos \varphi}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{r} (\cos \varphi \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{\partial \operatorname{arccot} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{zy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{y}{r^2} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{y}{r^2} \cot \theta = \frac{r \sin \theta \sin \varphi}{r^2} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1}{r} (\sin \varphi \cos \theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial z} &= \frac{\partial \operatorname{arccot} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}}{\partial z} = \frac{-1}{1 + \frac{z^2}{x^2 + y^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \frac{-\sqrt{x^2 + y^2}}{r^2} = \frac{-r \sqrt{\sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \theta \sin^2 \varphi}}{r^2} = \frac{1}{r} (-\sin \theta)\end{aligned}$$

Die drei Ableitungen von θ nach x , y und z ergeben den Einheitsvektor \vec{e}_θ mit dem Vorfaktor $\frac{1}{r}$.

Somit haben wir obige Formel für den Gradienten in Kugelkoordinaten nachgewiesen. Für die Divergenz und die Rotation kann man analog vorgehen:

$$\operatorname{grad} f(r, \varphi, \theta) = \left(\frac{\partial f}{\partial r} \mid \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mid \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \tan \theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(r, \varphi, \theta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (v_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\varphi) \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

1.8 Beispiele zur Vektor–Analysis:

1.8.1 Das Potential eines Dipolfeldes

Wir betrachten einen elektrischen Dipol, der aus zwei Ladungen e und $-e$ im Abstand a besteht. Die beiden Ladungen befinden sich in x –Richtung am Ort $a/2$ und $-a/2$. Das entsprechende Dipolmoment $\vec{p} = q \cdot \vec{r}$ lautet in diesem Fall $\vec{p} = (ea, 0, 0)$ und zeigt von $-e$ nach e .

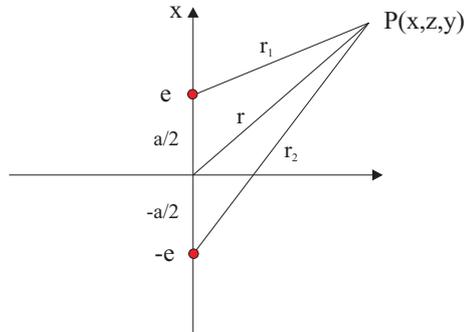


Abbildung 1.9: Elektrischer Dipol. Die beiden Ladungen e und $-e$ befinden sich im Abstand a .

Das elektrische Potential an einem beliebigen Punkt P im Raum ist gegeben durch:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2} \right)$$

Hierbei ist r_1 bzw. r_2 der Abstand von der Ladung e bzw. $-e$. Für den Abstand gilt:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ r_1 &= \sqrt{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 + z^2} = r \sqrt{1 - \frac{ax}{r^2} + \frac{a^2}{4r^2}} \end{aligned}$$

Für große Abstände vom Dipol (Fernfeld–Näherung: $r \gg a$) kann der quadratische Term näherungsweise vernachlässigt werden. Ferner kann die Wurzel nach Taylor entwickelt werden:

$$r_1 \sim r \left(1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2} \right)$$

Analog erhält man:

$$r_2 \sim r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2} \right)$$

Die beiden Abstände können nun in die Formel für das Potential eingesetzt werden:

$$\begin{aligned}
\phi(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{e}{\left| \vec{r} - \frac{1}{2} \frac{ax}{r} \right|} - \frac{e}{\left| \vec{r} + \frac{1}{2} \frac{ax}{r} \right|} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{ax}{r^2}} \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \frac{\frac{ax}{r^2}}{1 - \frac{1}{4} \left(\frac{ax}{r^2} \right)^2}
\end{aligned}$$

Vernachlässigt man den quadratischen Term (Fernfeld: $r \gg a$), so erhält man:

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{eax}{r^3}$$

Setzt man das elektrische Dipolmoment $\vec{p}(\vec{r}) = (ea, 0, 0)$ ein, so ist:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Aus dem Potential lässt sich das elektrische Feld berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\text{grad } \phi \\
&= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot |\vec{r}|^3 - 3|\vec{r}|^2 \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{p} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|^6} \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3 \vec{e}_r \cdot \vec{p} \cdot \vec{e}_r - \vec{p}}{|\vec{r}|^3}
\end{aligned}$$

Aufgrund der radialen Symmetrie des Dipols bietet es sich an, das Potential des Dipols und dessen elektrisches Feld in Kugelkoordinaten anzugeben:

$$\phi(r, \theta, \varphi) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}$$

Aus dem Potential lässt sich das elektrische Feld berechnen:

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\text{grad } \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \vec{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \vec{e}_\theta - \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p \cos \theta}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_r + \frac{p \sin \theta}{|\vec{r}|^3} \vec{e}_\theta \right) \\
&= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{e}_r(\vec{p} \cdot \vec{e}_r) - \vec{p}}{|\vec{r}|^3}
\end{aligned}$$

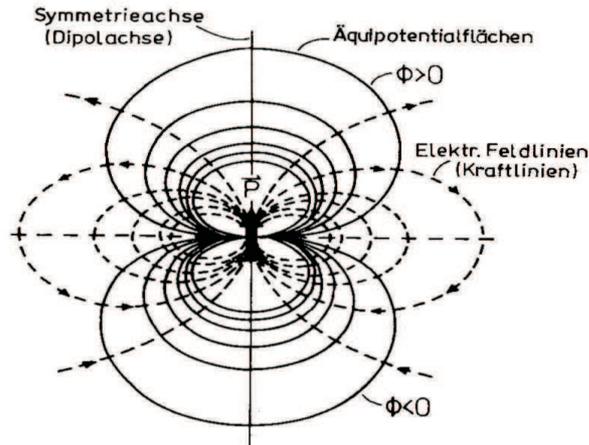


Abbildung 1.10: Elektrisches Feld eines Dipols. Die Abbildung zeigt den Verlauf der der Feldlinien und der Äquipotentialflächen.

- Das Potential des elektrischen Dipols nimmt mit r^{-2} am. Im Gegensatz hierzu fällt das Potential einer einzelnen elektrischen Ladung mit r^{-1} ab.
- In der Symmetrieebene verschwindet das Potential: $\varphi(r) = 0$
- Das Potential ist in Richtung des Dipols am größten.

Dipol in einem äußeren elektrischen Feld

Ein Dipol wird in ein äußeres elektrisches Feld \vec{E} gebracht. Ist das elektrische Feld \vec{E} homogen, so sind die Kräfte auf die beiden Ladungen gleich und entgegengesetzt. Dies ergibt keine Gesamtkraft, aber ein Drehmoment \vec{M} .

$$\vec{M} = Q \vec{l} \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} = p \cdot E \cdot \sin \alpha$$

Das Drehmoment versucht den Dipol in Feldrichtung auszurichten. Erst dann verschwindet das Dipolmoment.

Allerdings erfordert die Drehung des Dipols eine Energie. Diese Energie ist die Summe der Energien der Einzelladungen und kann direkt mit Hilfe des Dipolmoments berechnet werden. Hierbei ist das von außen aufgewendete Drehmoment M_α dem Drehmoment des Dipols M_{Dip} entgegengerichtet.

$$W = \int M_\alpha d\alpha = \int M_{\text{Dip}} \cdot d\alpha = \int p E_0 \sin \alpha d\alpha = -p E_0 \cdot \cos \alpha = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Liegt der Dipol parallel zum Feld, so ist seine potentielle Energie am geringsten, steht er senkrecht zum Feld, so ist seine potentielle Energie maximal.

1.8.2 Das Biot–Savartsche Gesetz

Von Biot und Savart wurden im Jahr 1820 die von elektrischen Strömen induzierten magnetischen Felder und die dadurch ausgeübten Kräfte untersucht.

Von einem Stromelement $I d\vec{s}$, d.h. einer fließenden Ladung, wird am Punkt P ein Magnetfeld hervorgerufen. Für dieses Magnetfeld \vec{B} gilt:

Biot-Savart'sches Gesetz

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

Das von dem elektrischen Strom in einem Leiterelement hervorgerufene magnetische Feld

- ist proportional zum Strom,
- ist umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstands,
- die Feldlinien verlaufen in konzentrischen Kreisen um den Leiter („Rechte-Hand-Regel“).

Magnetfeld eines geraden Leiters:

Für das Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters gilt:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds \cdot r \cdot \sin \psi}{|\vec{r}|^3} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R \cdot ds}{(s^2 + R^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

R ist hierbei der Abstand vom Leiter mit: $R = r \cdot \sin \psi$

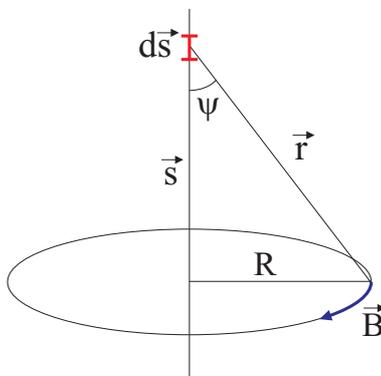


Abbildung 1.11: Magnetfeld eines unendlich langen, geraden Leiters.

Um das Integral zu lösen, kann man wie folgt substituieren: $s = R \sinh u$.

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= \frac{d \operatorname{arcsinh}(s/R)}{ds} = \frac{1}{R} \frac{1}{\sqrt{(s/R)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{s^2 + R^2}} \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{s}}{(s^2 + R^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \cdot R \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{u}}{R^2 \sinh^2 u + R^2} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{u}}{\sinh^2 u + 1} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{u}}{\cosh^2 u} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\tanh u) \Big|_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2 \cdot I}{R} \end{aligned}$$

Wegen des Kreuzprodukts zeigen die Feldlinien immer entlang konzentrischer Kreise um den stromdurchflossenen Leiter. Im Gegensatz zum Biot-Savartschen Gesetz nimmt die Stärke des magnetischen Feldes beim geraden Leiter nicht mit $1/r^2$, sondern mit $1/r$ ab.

Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Stromschleife:

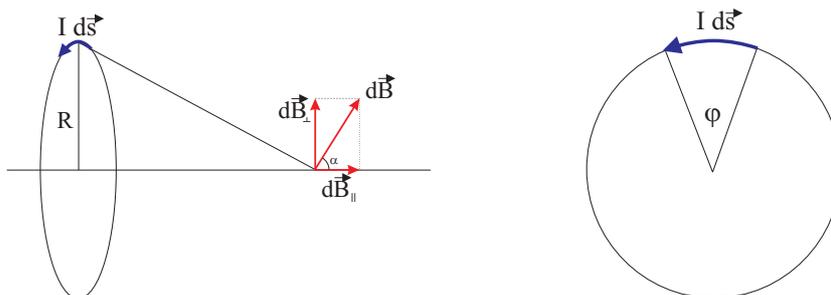


Abbildung 1.12: Magnetfeld auf der Achse einer kreisförmigen Stromschleife.

$$\vec{B} = \int dB_{\parallel} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int \cos \alpha \frac{ds}{r^2}$$

mit: $ds = R \cdot d\varphi$ $R = r \cdot \cos \alpha$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R^2}{r^3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{I R^2}{r^3}$$

Für große Entfernungen von der Leiterschleife ($R \ll r$) kann man den Radius der Leiterschleife vernachlässigen. In diesem Fall nimmt die Stärke des magnetischen Feldes mit $1/r^3$ ab.

Magnetfeld auf der Achse einer Magnetspule:

Ausgehend von dem Ergebnis für eine einzelne Leiterschleife kann man das Magnetfeld einer Magnetspule berechnen. Die Spule besitzt n_0 Windungen und die Länge l .

$$dB = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + \xi^2)^{3/2}} dI$$

in dem Spulenstück $d\xi$ fließt der Strom $dI = I dn$:

$$dI = I dn = \frac{dn}{d\xi} I d\xi = \frac{n_0}{l} I d\xi$$

$\frac{dn}{d\xi} = \frac{n_0}{l}$ ist die Windungsdichte der Spule.

$$\begin{aligned} B &= \int dB = \frac{\mu_0}{2} \frac{I n_0}{l} \int_{-l/2-x}^{l/2-x} \frac{R^2 d\xi}{(R^2 + \xi^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2} \frac{I n_0}{l} \left[\frac{\frac{l}{2} - x}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} - x)^2}} + \frac{\frac{l}{2} + x}{\sqrt{R^2 + (\frac{l}{2} + x)^2}} \right] \end{aligned}$$

Spulenmitte: $x = 0$

$$B(0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I n_0}{\sqrt{R^2 + l^2/4}} \approx \mu_0 \frac{I n_0}{l}$$

Die letzte Näherung gilt, falls die Spule lang und sehr dünn ist, d.h. $R \ll l/2$.

Spulende: $x = l/2$

$$B(l/2) = \frac{\mu_0}{2} \frac{I n_0}{l} \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}} \approx \frac{\mu_0}{2} \frac{I n_0}{l}$$

Das bemerkenswerte Ergebnis ist, dass die magnetische Feldstärke am Rand der Spule genau halb so groß ist wie in ihrer Mitte.

1.8.3 Das Kraftgesetz der Elektrodynamik

Ein äußeres Feld übt auf einen stromdurchflossenen Leiter eine Kraft aus:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= I \cdot \vec{l} \times \vec{B} \\ &= q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

Kraft zwischen zwei geschlossenen Leitern

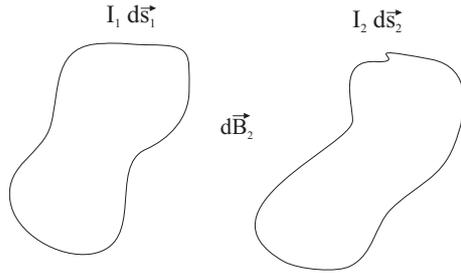


Abbildung 1.13: Kraft zwischen zwei geschlossenen Leitern. Der Strom im Leiter 2 erzeugt ein Magnetfeld, das auf den Leiter 1 eine Kraft ausübt.

Das Stromelement $I_2 d\vec{s}_2$ erzeugt am Ort \vec{r}_1 ein Magnetfeld \vec{B}_2 , für das nach dem Biot-Savart'schen Gesetz gilt:

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} I_2 \frac{d\vec{s}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Dieses magnetische Feld \vec{B}_2 übt eine Kraft auf das Leitelement $d\vec{s}_1$ aus:

$$\begin{aligned} d\vec{F}_{12} &= I_1 (d\vec{s}_1 \times d\vec{B}_2) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} \end{aligned}$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über die beiden geschlossenen Leiterkreise:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{d\vec{s}_1 \times (d\vec{s}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2))}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}$$

Nach den Regeln der Vektorrechnung gilt:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \\ d\vec{s}_1 \times d\vec{s}_2 \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) &= (d\vec{s}_1 \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)) d\vec{s}_2 - (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \end{aligned}$$

Den ersten Term kann man wie folgt umformen:

$$\frac{(ds_1(\vec{r}_1 - \vec{r}_2))ds_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} = -d\vec{s}_2 \left(d\vec{s}_1 \cdot \text{grad}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \right)$$

Folglich ist $\frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$ ein Potential. Das entsprechende Vektorfeld ist konservativ. Daher ist die Integration unabhängig vom Integrationsweg und ein geschlossenes Linienintegral muss verschwinden.

Für die gesamte Kraft erhält man:

$$\begin{aligned} F_{12} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_2 d\vec{s}_2 \oint_1 d\vec{s}_1 \text{grad}_1 \frac{1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ &\quad - \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2) \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, da das geschlossene Linienintegral über ein konservatives Vektorfeld Null ergibt.

Insgesamt erhält man für die Kraft zwischen zwei geschlossenen Leitern:

$$F_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_1 \oint_2 \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2)$$

Zwei parallele gerade Leiter:

Wie bereits berechnet ist das magnetische Feld eines unendlich langen, geraden Leiters:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{2I_2}{d}$$

$$d\vec{F} = I_1 \cdot d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2$$

Da die beiden Leiter parallel verlaufen, stehen ds_1 und B_2 aufeinander senkrecht.

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= I_1 d\vec{s}_1 \times \vec{B}_2 \\ &= I_1 (d\vec{s}_1 \cdot \vec{B}_2) \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{F}}{ds_1} = I_1 \frac{d\vec{s}_1 \cdot \vec{B}_2}{ds_1} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2I_1 I_2}{d}$$

Dies ist die ursprüngliche Definition der Stromstärke. $\frac{d\vec{F}}{ds_1}$ ist hierbei die Kraft pro Längeneinheit. Mittels dieser Kraftmessung durch das Biot-Savart'sche Gesetz lässt sich $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$ bestimmen.

1.8.4 Das Vektorpotential

Das magnetische Feld, das von einer Stromverteilung $j(\vec{r}')$ ausgeht, lautet:

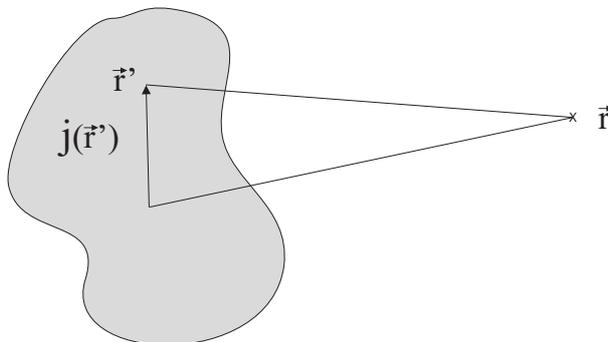


Abbildung 1.14: Magnetisches Feld am Ort \vec{r} , das von einer Stromdichte am Ort \vec{r}' ausgeht.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

Wie bereits in einer der vorhergehenden Vorlesungen gezeigt wurde, gilt folgender Zusammenhang für den Gradienten:

$$\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = -\nabla \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \nabla' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Somit kann man das magnetische Feld wie folgt umschreiben:

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}) &= \nabla \times \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \\ &= \text{rot} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) = \text{rot} \vec{A} \end{aligned}$$

\vec{A} ist das Vektorpotential des magnetischen Feldes.

Ferner gilt:

$$\text{div} \vec{B} = \text{div} \text{rot} \vec{A} = 0$$

Daraus ergeben sich folgende Konsequenzen:

- das magnetische Feld besitzt weder Quellen noch Senken,
- es gibt keine magnetische Monopole.

1.8.5 Die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik

Die Stromdichte in einem Leiter ist wie folgt definiert:

$$j = |\vec{j}| = \frac{dq}{dt dF}$$

Dies entspricht dem Fluss von Ladungen pro Zeit t durch die Fläche F .

Für den elektrischen Strom gilt:

$$I = \int \vec{j} \cdot \vec{n} dF$$

Wir betrachten ein Volumen V mit der Ladungsdichte ϱ . Da prinzipiell Ladungserhaltung gilt, führt eine zeitliche Änderung der Ladungsdichte (z.B. eine Abnahme der Ladungsdichte) zu einem Stromfluss durch die Oberfläche:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dt} \int_V \varrho dV &= \int \vec{j} \cdot \vec{n} dF = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV \\ \Rightarrow \int_V \left(\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} \right) dV &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\left(\frac{d\varrho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} \right) = 0}$$

Dies ist die Kontinuitätsgleichung der Elektrodynamik. Sie garantiert die Ladungserhaltung.

2 Vorlesung: 12. 6. bis 19. 6. 2006 Linien- und Flächenintegrale

2.1 Motivation: Das Potential

- Der Gradient eines Skalarfeldes ergibt ein Vektorfeld.
- Nicht jedes Vektorfeld ist zwingend der Gradient eines Skalarfeldes.

$$\vec{v}(\vec{x}) \stackrel{?}{\iff} \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$$

Falls dies doch der Fall sein sollte, so ist das Vektorfeld **konservativ** (Vektorpotential), und das zugehörige Skalarfeld ist das **Potential**.

Für das Vektorpotential gelten folgende wichtige Eigenschaften:

1. Das Kurvenintegral über ein Vektorpotential ist unabhängig vom Integrationsweg und ergibt sich somit direkt aus der Potentialdifferenz zwischen Anfangs- und Endpunkt der Integration.
2. Folglich muss das Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve verschwinden:

$$\oint \vec{v}(\vec{x}) d\vec{r} = 0$$

3. Ferner ist: $\text{rot } \vec{v}(\vec{x}) = 0$

2.2 Linienintegrale

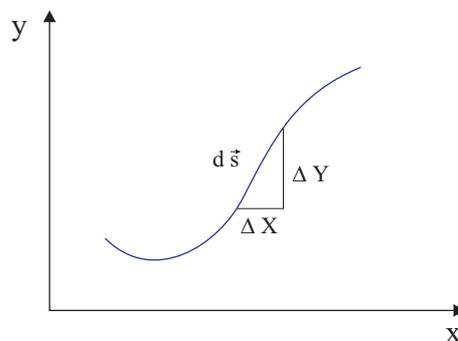


Abbildung 2.1: Bogenlänge einer ebenen Kurve.

Die Bogenlänge einer ebenen Kurve kann wie folgt berechnet werden:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ L &= \sum_{i=1}^n \Delta s_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} \\ &= \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \frac{\Delta y_i^2}{\Delta x_i^2}} \cdot \Delta x_i \\ &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx \end{aligned}$$

kartesische Koordinaten

$$y = f(x) \quad s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Parameter Darstellung

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad s = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Das Bogenelement ist wie folgt definiert:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + (f'(x))^2} = \sqrt{(\dot{x}(t))^2 + (\dot{y}(t))^2}$$

Polarkoordinaten

$$r = r(\varphi) \\ \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1$$

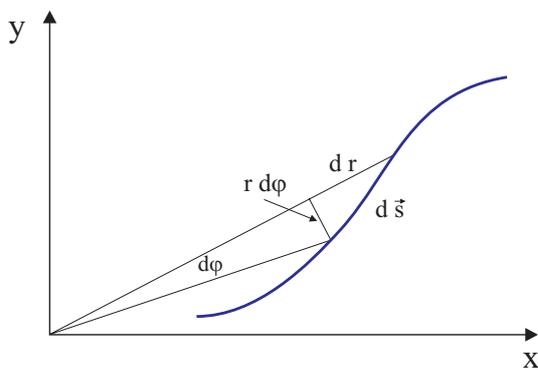


Abbildung 2.2: Bogenlänge einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten r und φ .

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r d\varphi)^2} \\ s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$$

1. Beispiel: Der Kreisumfang

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$1 + (y'(x))^2 = 1 - \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = 4 \int_0^r \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 4r \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}} \\ &= 4r \cdot \arcsin z \Big|_0^1 = 4r \cdot \frac{\pi}{2} = 2r \pi \end{aligned}$$

Der Kreisumfang in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} r(\varphi) &= r && (\text{conts.}) \\ 0 \leq \varphi &< 2\pi \end{aligned}$$

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi = \int_0^{2\pi} r d\varphi = 2r \pi$$

2. Beispiel: Zykloid

Bahnbewegung, die ein Punkt beim Abrollen eines Kreises beschreibt:

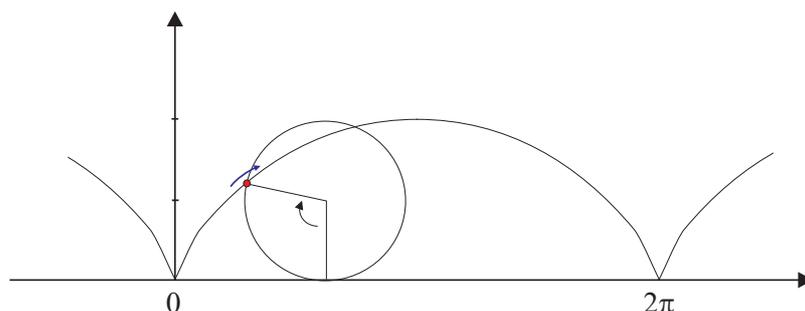


Abbildung 2.3: Konstruktion eines Zykloids: Abrollen eines Kreises.

$$\vec{x}(t) = \underbrace{r \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{horizontale Bewegung}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}}_{\text{Kreis Bewegung}}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} r(t - \sin(t)) \\ r(1 - \cos(t)) \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} r(1 - \cos(t)) \\ r \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&= r\sqrt{(1 - \cos(t))^2 + \sin^2(t)} dt \\
&= r\sqrt{1 - 2\cos(t) + \cos^2(t) + \sin^2(t)} dt \\
&= r\sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(t)} dt \\
&= r\sqrt{2} \sqrt{2\sin^2(t/2)} dt \\
&= 2r \sin(t/2) dt
\end{aligned}$$

Somit erhält man für die Bogenlänge des Zykliden:

$$\begin{aligned}
Z &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 2r \int_0^{2\pi} \sin(t/2) dt \\
&= 2r [-2\cos(t/2)] \Big|_0^{2\pi} = 8r
\end{aligned}$$

Die volle Länge eines gespitzten Zyklids (abrollender Kreis) hat die 4-fache Länge des Durchmessers des Kreises. Die Zahl π taucht hierbei nicht mehr auf.

3. Beispiel: Die Ellipse

Für die Ellipse gilt:

$$r^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} a \cos(t) \\ b \sin(t) \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -a \sin(t) \\ b \cos(t) \end{pmatrix}$$

Somit erhält man für das Bogenelement der Ellipse:

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} dt \\
&= \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt
\end{aligned}$$

Der Umgang (Bogenlänge) der Ellipse beträgt:

$$U = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt$$

Dieses Integral ist nur noch numerisch lösbar.

2.3 Dreidimensionale Linienintegrale

Im dreidimensionalen Raum sei eine glatte Kurve C in der Parameterdarstellung durch die Funktion $x = x(s)$, $y = y(s)$ und $z = z(s)$ gegeben (Die Kurve C sei glatt und stetig). Als Parameter sei direkt die Bogenlänge s gewählt. Die Kurve C ist auf der Fläche (gegeben durch die Funktion $f(x, y, z)$) definiert. Diese Funktion ordnet jedem Punkt $P_i(x_i, y_i, z_i)$ der Kurve $C(s_i)$ einen Wert $f(x_i, y_i, z_i)$ zu.

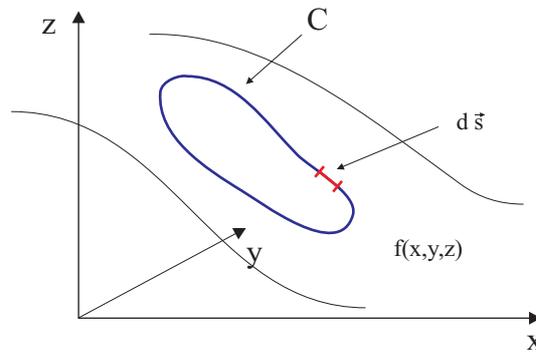


Abbildung 2.4: Linienintegral der Kurve C auf der Funktion $f(x, y, z)$.

$$f(x, y, z) = f(x(s), y(s), z(s))$$

Die Bogenlänge ist nun:

$$\sum_{i=1}^n f(x(s_i), y(s_i), z(s_i)) \cdot \Delta s_i$$

Das Kurvenintegral lautet:

$$\int_C f(x(s), y(s), z(s)) ds = \lim_{\substack{\Delta s_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x(s_i), y(s_i), z(s_i)) \cdot \Delta s_i$$

Substitution der Bogenlänge durch den allgemeinen Parameter t :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

$$\begin{aligned} \int_C f(x(s), y(s), z(s)) ds &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \frac{ds}{dt} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \end{aligned}$$

2.4 Oberflächenintegrale

Die Fläche F , die auf der Funktion $f(x, y, z)$ verläuft, kann analog zu obiger Überlegung in n Teilstücke zerlegt werden.

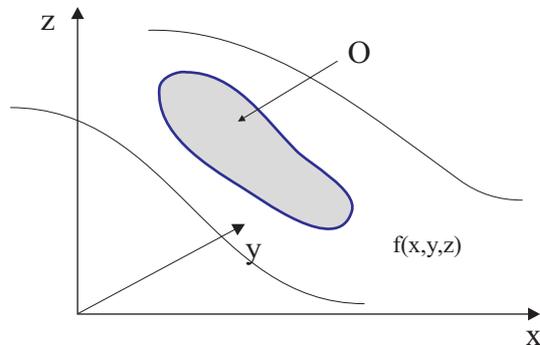


Abbildung 2.5: Oberflächenintegral der Fläche F auf der Funktion $f(x, y, z)$.

$$F = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta F_i$$

$$O = \int_F f(x, y, z) dF = \lim_{\substack{\Delta F_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \cdot \Delta F_i$$

Die Fläche kann mit den beiden Parametern u und v beschrieben werden ($\vec{x} = \vec{x}(u, v)$). Analog zu obiger Herleitung kann man diese durch den allgemeinen Parameter t substituieren.

Linienintegral

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{dv}{dt}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2$$

$$d^2s = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) du dv + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2$$

Die Länge der Kurve ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(\dot{x}(t))^2} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2 \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right) \left(\frac{du}{dt} \frac{dv}{dt}\right) + \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt \end{aligned}$$

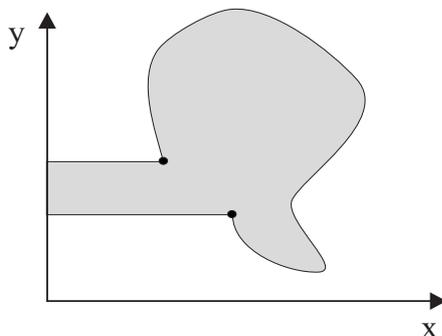
Oberflächenintegral

Analog erhält man für das Oberflächenintegral:

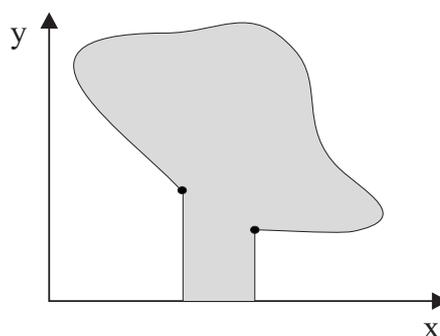
$$d^2O = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 du^2 \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 dv^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 du^2 dv^2$$

$$O = \int_F f(x, y, z) dO = \iint_U f(x, y, z) \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v}\right)^2} du dv$$

Sonderfall: Ebene Flächen:



$$F = \int_{t_0}^{t_1} x(t) \dot{y}(t) dt$$



$$F = \int_{t_0}^{t_1} -y(t) \dot{x}(t) dt$$

Beispiel: Fläche einer Ellipse

$$\begin{aligned} x(t) &= a \cos t & \dot{x}(t) &= -a \sin t \\ y(t) &= a \sin t & \dot{y}(t) &= b \cos t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= 2 \int_0^\pi -y(t) \dot{x}(t) dt \\ &= 2ab \int_0^\pi \sin^2 t dt = 2ab \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \right] \Big|_0^\pi = \pi ab \end{aligned}$$

Im Gegensatz zum Umfang lässt sich die Fläche einer Ellipse problemlos berechnen.

2.5 Mantel eines Rotationskörpers

$$\boxed{\text{Mantel} = \text{Linienintegral} \cdot 2\pi}$$

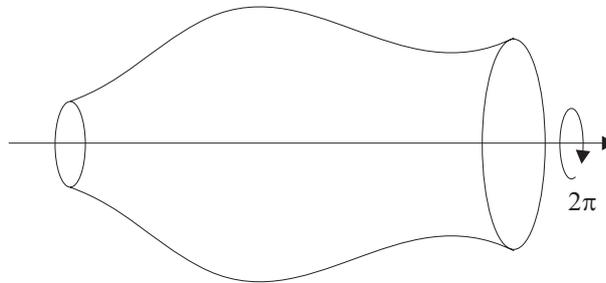


Abbildung 2.6: Mantel eines Rotationskörpers.

$$\begin{aligned} M &= 2\pi \int_{t_0}^{t_1} f(x, y, z) \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2} dt \\ &= 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + (y')^2} dx \end{aligned}$$

Beispiel: Kugeloberfläche

Ein Kreis dreht sich um die x -Achse. Durch diese Rotation entsteht eine Kugel.

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$1 + (y'(x))^2 = 1 - \frac{x^2}{r^2 - x^2} = \frac{r^2}{r^2 - x^2}$$

$$\begin{aligned} O &= 2\pi \int_{-r}^r y \sqrt{1 + (y')^2} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx \\ &= 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2 \end{aligned}$$

3 Vorlesung: 3. 7. 2006

Potentialreihen–Zerlegung: Die Taylor'sche Reihe

3.1 Die Taylorentwicklung

Eine beliebige Funktion (stetig und $(n + 1)$ -mal differenzierbar) kann als Potenzreihe dargestellt werden. Diese Reihendarstellung nennt man **Taylorreihe**:

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu + R_n$$

- R_n ist das Lagrange'sche Restglied:

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \vartheta(x - x_0))}{(n + 1)!} (x - x_0)^{n+1} \quad \vartheta \in [0, 1]$$

- Im Fall einer unendlichen Reihe ist $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.
- Der Spezialfall $x_0 = 0$ wird auch Mac-Laurin'sche Reihe genannt.

In der Physik ist es oft sinnvoll, eine komplizierte Funktion näherungsweise durch ein Polynom n -ter Ordnung zu beschreiben und die höheren Terme, unter Berücksichtigung der Fehlerabschätzung, zu vernachlässigen.

Beispiel: Polynom

$$f(x) = x^3 + 2x + 1 \quad \text{um } x_0 = -1$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^{(\nu)}(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= (x_0^3 + 2x_0 + 1) + (3x_0^2 + 2)(x - x_0) \\ &\quad + \frac{1}{2!}(6x_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{3!}6(x - x_0)^3 \\ &= -2 + 5(x - x_0) - 3(x - x_0)^2 + (x - x_0)^3 \\ &= x^3 + 2x + 1 \end{aligned}$$

3.2 Taylorreihen einiger wichtiger Funktionen

Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x \quad \text{um} \quad x_0 = 0$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= e^0 x^0 + \frac{1}{1!} e^0 x^1 + \frac{1}{2!} e^0 x^2 + \frac{1}{3!} e^0 x^3 + \frac{1}{4!} e^0 x^4 \\ &= 1 + x + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen

$$\begin{array}{llll} f(x) &= \sin x & \text{um} & x_0 = 0 \\ f'(x) &= \cos x & & f'(x_0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin x & & f''(x_0) = 0 \\ f^{(3)}(x) &= -\cos x & & f^{(3)}(x_0) = -1 \\ f^{(4)}(x) &= \sin x & & f^{(4)}(x_0) = 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &= \sum_{\nu=0}^n \frac{f^\nu(x_0)}{\nu!} (x - x_0)^\nu \\ &= x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 - \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 - \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(x+a) = \sin a + x \cdot \cos a - \frac{x^2 \sin a}{2!} - \frac{x^3 \cos a}{3!} + \frac{x^4 \sin a}{4!} + \frac{x^5 \cos a}{5!} + \dots + \frac{x^n \sin(a + \frac{n\pi}{2})}{n!}$$

Hyperbolische Funktion

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{9!} x^9 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{8!} x^8 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

3.3 Beispiel aus der Festkörperphysik Wechselwirkung zwischen zwei Atomen

In der Natur ordnen sich die Atome zu regulären Kristallgitter an. Hierbei wirken zwischen den Atomen verschiedene anziehende und abstoßende Wechselwirkungen.

Anziehende Wechselwirkungen:

- Ionenbindung (z.B. $\text{Na}^+ + \text{Cl}^- \rightarrow \text{NaCl}$)
- kovalente Bindung
- metallische Bindung
- Van-der-Waals Bindung

Abstoßende Wechselwirkung

- Coulombabstoßung der negativ geladenen Atomhüllen

Bei einem bestimmten Abstand r_0 sind die anziehenden und abstoßenden Kräfte im Gleichgewicht. Dies ist der Abstand der Atome im Kristallgitter.

Die anziehenden bzw. abstoßenden Wechselwirkungen können näherungsweise durch folgende Funktionen beschrieben werden:

$$\text{Anziehung} \quad : \quad -B \cdot r^{-n}$$

$$\text{Abstoßung} \quad : \quad A \cdot r^{-m}$$

Gesamtpotential: $W_{pot} = Ar^{-m} - Br^{-n}$

Eine realistische Beschreibung liefert das **Lenard–Jones Potential**:

$$W_{pot} = -4\epsilon \left(\left(\frac{\sigma}{r} \right)^6 - \left(\frac{\sigma}{r} \right)^{12} \right)$$

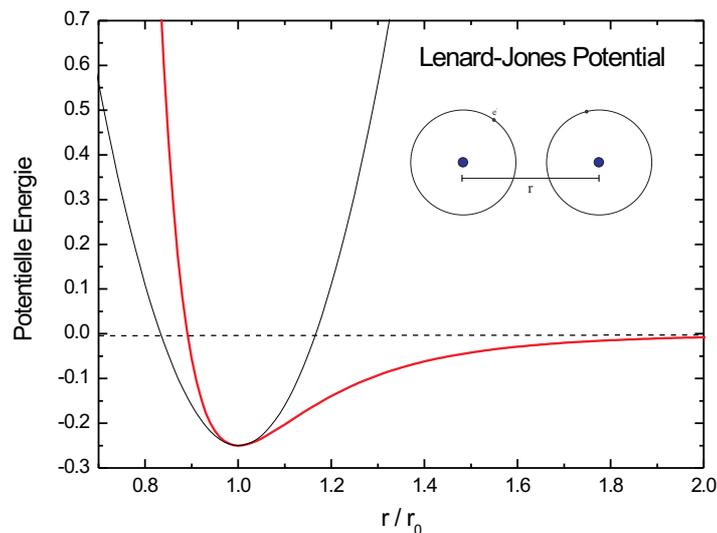


Abbildung 3.1: Verlauf der potentiellen Energie bei der Annäherung zweier Atome (Lenard–Jones Potential).

Der erste Term des Lenard–Jones Potentials beschreibt die Anziehung der Atome aufgrund der zwischenatomaren Kräfte, während der zweite Ausdruck die Abstoßung zwischen den abgeschlossenen Elektronenhüllen der Atome wiedergibt. Die beiden Konstanten ϵ und σ sind empirische Parameter.

Nähern sich zwei Atome gegenseitig an, so wirken zunächst anziehende Wechselwirkungen. Bei einem bestimmten Abstand r_0 herrscht Kräftegleichgewicht zwischen den anziehenden und den abstoßenden Wechselwirkungen. Dieser Gleichgewichtsabstand ist der Bindungsabstand der Atome im Molekül oder Festkörper. Nähert man die Atome weiter an, so nimmt die abstoßende Wechselwirkung dramatisch zu.

Kräftegleichgewicht herrscht, wenn die potentielle Energie im Minimum ist, d.h. $W'_{pot} = 0$.

$$W'_{pot}(r) = \frac{d W_{pot}(r)}{d r} = -4\epsilon \left(\frac{-6\sigma^6}{r^7} - \frac{-12\sigma^{12}}{r^{13}} \right) = 0$$

$$\implies r_0 = 2^{1/6} \cdot \sigma$$

Die zweite Ableitung der potentiellen Energie nach dem Abstand zwischen den Atomen lautet:

$$W''_{pot}(r) = \frac{d^2 W_{pot}(r)}{d r^2} = -4\epsilon \left(\frac{42\sigma^6}{r^8} - \frac{156\sigma^{12}}{r^{14}} \right)$$

Entwickelt man das Lenard–Jones Potential in eine Taylorreihe um den Gleichgewichtsabstand r_0 , so erhält man:

$$W_{pot}(r) = W(r_0) + \underbrace{W'(r_0)}_{=0} (r - r_0) + \frac{1}{2} W''(r_0) (r - r_0)^2 + \dots$$

$$= W(r_0) + \frac{1}{2} W''(r_0) (r - r_0)^2 + \dots$$

Berücksichtigt man nur Terme bis zur 2. Ordnung, so spricht man von der **harmonischen Näherung**. Da z.B. die thermische Auslenkung der Atome aus der Gleichgewichtslage sehr klein ist, im Vergleich zu den atomaren Abständen, genügt es oft, die harmonische (quadratische) Näherung zu betrachten, um experimentell beobachtete Effekte wie Atomschwingungen erklären zu können.

4 Vorlesungen: 3. 7. 2006 und 17. 7. 2006

Fouriertransformation

4.1 Reihenentwicklung in trigonometrische Funktionen

Bei vielen Problemen in der Physik ist es erforderlich, eine periodische Funktion in eine Reihe aus trigonometrischen Funktionen zu entwickeln:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx))$$

Eine Reihe dieser Form heißt **Fourierreihe** und die Entwicklung einer Funktion in ihre Fourierreihe bezeichnet man als **harmonische Analyse**. In der praktischen Anwendung bricht man die Reihe nach einer endlichen Zahl von sin- und cos-Gliedern ab.

Die **Fourierkoeffizienten** a_k und b_k geben die Amplitudenverteilung, d.h. die Amplitude bei einer bestimmten Frequenz, wieder:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

- **Symmetriebetrachtungen:**

Die Fourierreihe einer geraden Funktion enthält nur gerade Reihenglieder, d.h. nur Cosinus-Terme:

$$f_g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

Eine ungerade Funktion enthält nur ungerade Reihenglieder, d.h. nur Sinus-Terme:

$$f_u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

- **Abbruch der Reihe:** Durch Abbruch nach einer endlichen Zahl von Termen erhält man eine Näherungsfunktion für $f(x)$ in der Form einer trigonometrischen Reihe. Die Näherung ist umso „präziser“, je „länger“ die Reihe ist.

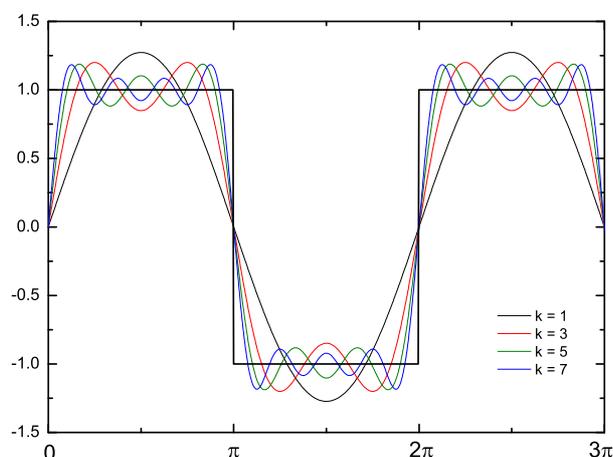
- **Allgemeine Periode:** Jede periodische Funktion läßt sich als Fourierreihe darstellen. Im allgemeinen Fall kann man die Periodendauer P wie folgt auf 2π skalieren:

$$a_k = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{P}kx\right) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{2}{P} \int_0^P f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{P}kx\right) dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

Beispiel: Rechteckskurve

$$f(x) = \begin{cases} +1 & \text{bei } 0 < x \leq \pi \\ -1 & \text{bei } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



Die obige Rechteckskurve ist eine ungerade Funktion. Ihre Fourierreihe muss somit folgende Form haben:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kx)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(kx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{\pi} \sin(kx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} -\sin(kx) dx \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi} \left[\frac{1}{k} \cos(kx) \right]_{\pi}^{2\pi} \\ &= \frac{1}{k\pi} [\cos(2k\pi) + \cos(0) - 2 \cos(k\pi)] \\ &= \frac{1}{k\pi} [2 - 2 \cos(k\pi)] \end{aligned}$$

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} 1 & k = \text{gerade} & k = 2, 4, 6, \dots \\ -1 & k = \text{ungerade} & k = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

$$k = \text{gerade} \quad b_k = \frac{1}{k\pi} (2 - 2) = 0$$

$$k = \text{ungerade} \quad b_k = \frac{1}{k\pi} (2 + 2) = \frac{4}{k\pi}$$

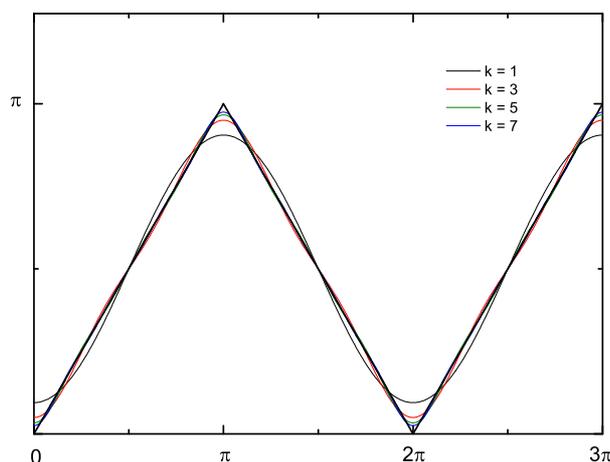
Die Fourierreihe der Rechteckskurve lautet:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin((2k-1)x)}{2k-1}$$

Dreieckskurve

$$f(x) = |x| \quad \text{mit der Periode } 2\pi$$

$$f(x) = \begin{cases} +x & \text{bei } 0 < x \leq \pi \\ -x & \text{bei } \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$



Die obige Dreieckskurve ist eine gerade Funktion. Ihre Fourierreihe muss somit folgende Form haben:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x| dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |x| \cos(kx) dx = 2 \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(kx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{k} x \sin(kx) \Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{k} \sin(kx) dx \\ &= \frac{2}{k^2 \pi} \cos(kx) \Big|_0^{\pi} = \frac{2}{k^2 \pi} (\cos k\pi - \cos 0) \end{aligned}$$

$$a_k = \begin{cases} \frac{-4}{k^2 \pi} & k = \text{gerade} & k = 1, 3, 5, \dots \\ 0 & k = \text{ungerade} & k = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

Die Fourierreihe der Dreieckskurve lautet:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)x)}{(2k-1)^2}$$

4.2 Fourierreihen einiger spezieller Funktionen

Rechteckskurve

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \left(\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \frac{1}{7} \sin 7x + \dots \right)$$

Dreieckskurve

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \frac{1}{7^2} \cos 7x + \dots \right)$$

Sägezahnkurve

$$f(x) = 2\pi - 2 \left(\sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{4} \sin 4x + \dots \right)$$

gleichgerichteter Wechselstrom

$$f(x) = |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x + \dots \right)$$

Einweg-Gleichrichter

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cos 2x + \frac{1}{3 \cdot 5} \cos 4x + \frac{1}{5 \cdot 7} \cos 6x + \dots \right)$$

4.3 Fourierentwicklung in komplexer Schreibweise

Eleganter ist die komplexe Schreibweise der Fourierentwicklung:

Fourierentwicklung:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{ikx} dk$$

Fourierkoeffizienten:

$$g(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

Beweis der Relation:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ik'x} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i(k-k')x} dk dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} g(k) \delta(k-k') dk = g(k') \end{aligned}$$

4.4 Die Dirac'sche δ -Funktion:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

$$\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$$

Eigenschaften der δ -Funktion:

Die Dirac'sche δ -Funktion ist ein sehr wichtiges Hilfsmittel bei der mathematischen Beschreibung der Physik. Sie ergibt erst nach der Integration ein sinnvolles, reales Ergebnis. Wichtig ist, dass die gesamte Fläche unter der Kurve von $\delta(x)$ eins ergibt, d.h.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1.$$

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - x_0) dx = f(x_0)$$

Näherungsweise kann die δ -Funktion wie folgt analytisch dargestellt werden:

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-k_0}^{k_0} e^{ikx} dk = \frac{1}{ix} (e^{ik_0x} - e^{-ik_0x}) \\ &= -\frac{i}{x} (\cos(k_0x) + i \sin(k_0x) - \cos(k_0x) + i \sin(k_0x)) = \frac{2}{x} \sin(k_0x) \end{aligned}$$

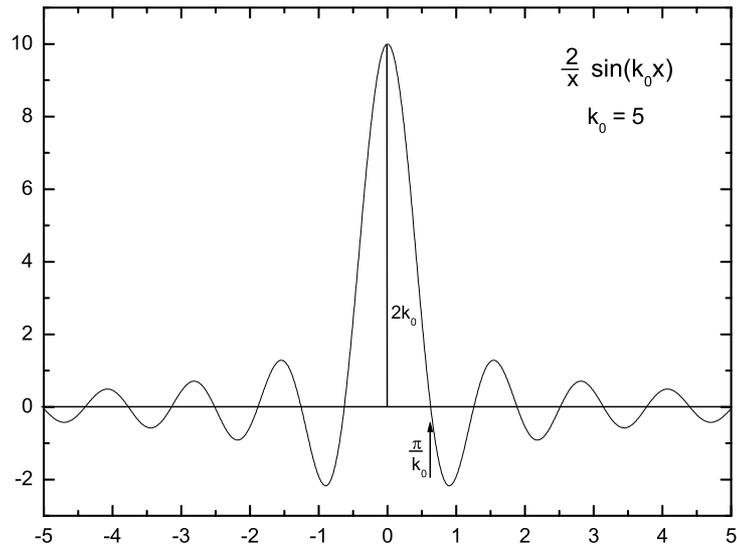


Abbildung 4.3.: Näherungsfunktion für die Dirac'sche δ -Funktion.

4.5 Fourierintegrale

Eine nichtperiodische Funktion kann prinzipiell nicht in eine Fourierreihe entwickelt werden.

Für den Grenzfall einer unendlichen Periodendauer $P \rightarrow \infty$ läßt sich jedoch auch eine beliebige Funktion nach Fourier entwickeln. Das Ergebnis ist das sog. **Fourierintegral**.

Falls das unendliche Integral einer Funktion existiert ($\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \leq \infty$), gilt:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(k) \cos(kx) + b(k) \sin(kx))$$

Die Fourierkoeffizienten sind nun keine diskreten Zahlenwerte, sondern stellen ein kontinuierliches Spektrum dar:

$$a(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx,$$

$$b(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx,$$

Die Gauß-Funktion:

Zur Vereinfachung wird hier die Gauß-Funktion ohne den normierenden Vorfaktor $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ betrachtet:

$$f(x) = \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$$

Die Fouriertransformation der Gauß-Funktion lautet:

$$\begin{aligned} g(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(ikx) \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma} - ik\sigma\right)^2\right) \, dx}_{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{2\pi\sigma^2} \cdot \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\sigma^2}{2\pi}} \exp\left(-\frac{k^2\sigma^2}{2}\right) \end{aligned}$$

Wichtig hierbei ist, dass die Standardabweichung σ im Exponenten der Gauß-Funktion im Zähler steht, während σ beim Fourierkoeffizienten im Exponenten im Nenner auftaucht. Als Konsequenz wird eine „scharfe“ Funktion auf eine „breite“ Funktion transformiert, und umgekehrt erscheint eine „breite“ Funktion im Fourierraum als eine „scharfe“ Funktion.

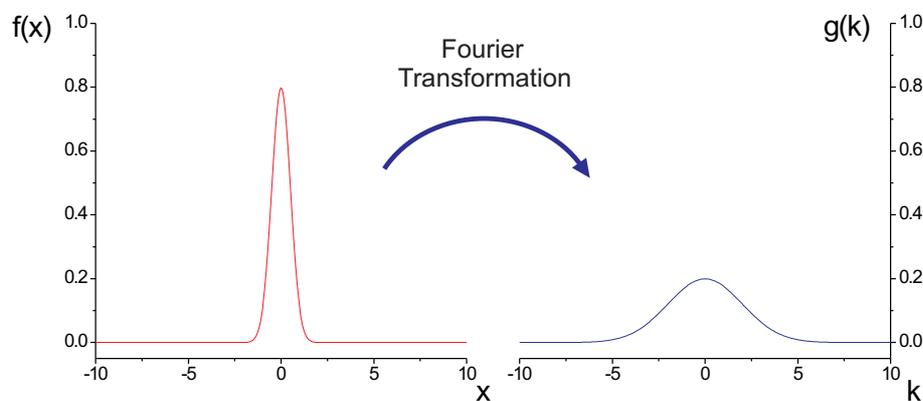


Abbildung 4.4.: Fouriertransformation der Gauß-Funktion.

4.6 Der Faltungssatz

Die Fouriertransformierte des Faltungsproduktes zweier Funktionen:

$$(f \circ g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy$$

ist bis auf $\sqrt{2\pi}$ gleich dem Produkt der Fouriertransformierten der einzelnen Faktoren:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (f \circ g)(x) \cdot e^{ikx} dx = \sqrt{2\pi}F(k) \cdot G(k)$$

Grenzwertsätze:

Ist $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, so ist auch $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(k) = g(k)$.

d.h. konvergiert die Fouriertransformierte gegen eine stetige Funktion, so existiert eine Funktion mit $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

4.7 Anwendungsbeispiele

4.7.1 Hochfrequenzfilter — Wiener-Filter

Die Fouriertransformation kann zur Unterdrückung von hochfrequentem Rauschen verwendet werden. Diese Methode findet vor allem in der Elektrotechnik Anwendung. Ein anderes Anwendungsbeispiel ist das „Glätten“ von verrauschten Funktionen.

Vorgehensweise:

1. Fouriertransformation $f(x) \rightarrow a(k)$.
2. Löschen der hochfrequenten Anteile von $a(k)$.
3. Rücktransformation $a(k) \rightarrow f(x)$.

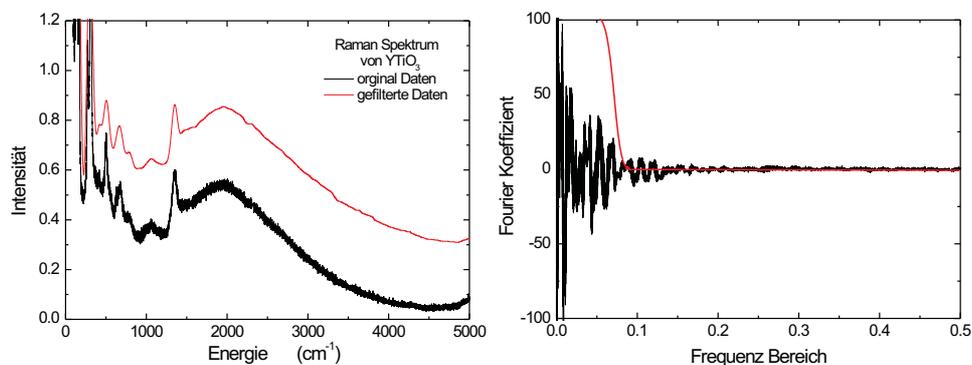


Abbildung 4.5.: Frequenzfilter zur Unterdrückung von Rauschen.

4.7.2 Fourieroptik

Licht ist eine elektromagnetische Welle. Man kann daher die Welleneigenschaften des Lichts nutzen, um die Wirkung von optischen Komponenten im Strahlengang zu untersuchen.

Nach dem Huygens'schen Prinzip geht von jeder Elementarwelle wiederum eine Elementarwelle aus.

1. Eine ebene Welle kann wie folgt beschrieben werden:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}\vec{r})) = \psi(0)$$

2. Eine ebene Welle mit einer Phasendifferenz lautet:

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}(\vec{r} + \vec{d})))$$

3. Am Spalt lautet der Gangunterschied:

$$\begin{aligned} d &= y \sin \phi && \text{Gangunterschied} \\ \delta &= \frac{2\pi d}{\lambda} = k \cdot d && \text{Phasendifferenz} \end{aligned}$$

Somit kann man eine Lichtwelle bei der Beugung am Spalt wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}, t) &= \psi_0 \exp(i(\omega t - \vec{k}(\vec{r} + y \sin \phi))) \\ &= \psi(0) \exp(-i\vec{k}y \sin \phi) \end{aligned}$$

4. Die Superposition aller Wellen, die den Spalt passieren, lautet:

$$\begin{aligned} \psi_{Ges}(\phi) &= \int_{-b/2}^{b/2} \psi(0) \exp(-i\vec{k}y \sin \phi) dy \\ &= \psi(0) \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-ik_y y) dy \end{aligned}$$

Dies ist exakt die Fouriertransformation der Spaltfunktion:

$$F(y) = \begin{cases} 1 & |y| \leq b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Beugung am Spalt lässt sich als die Fouriertransformation der Spaltfunktion beschreiben!

Man kann sämtliche, auch komplizierte geometrische Muster mit Hilfe der Fouriertransformation behandeln und erhält jeweils das entsprechende Beugungsbild.

Die Linse als Fouriertransformator

Eine Linse führt eine zweidimensionale Fouriertransformation durch. Hierbei wird die Objektebene auf die Fourierebene abgebildet.

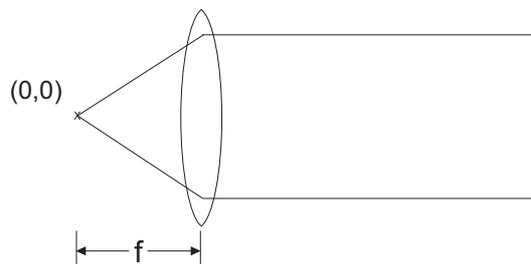


Abbildung 4.6.: Die Linse als zweidimensionaler Fouriertransformator.

Die Lichtquelle befindet sich am Ursprung ($x = 0, y = 0$):

$$E(x, y) = E_0 \delta(x)\delta(y)$$

Die Fouriertransformation lautet:

$$\begin{aligned} F[E(x, y)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \delta(x)\delta(y) \exp(-i(xk_x + yk_y)) dx dy \\ &= E_0 \end{aligned}$$

Eine wichtige Anwendung ist der sogenannte $4f$ -Aufbau, wie er z.B. in Mikroskopen verwendet wird. In der Fourierebene kann man durch Blenden, Filter oder Phasendifferenz-Platten Veränderungen der Beugungsbilds erreichen:

- optische Filterung von Streulicht.
- Kontraste im Objektbild können verstärkt werden.
(Tiefpassfilter: hohe Raumfrequenzen werden abgeschnitten).
- Ein störender Untergrund kann beseitigt werden.

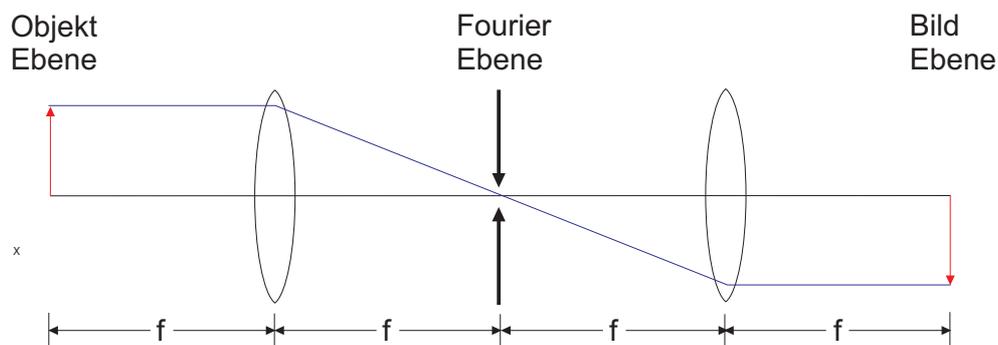


Abbildung 4.7.: Der $4f$ -Aufbau.

Beugung am Spalt

Eine elektromagnetische Welle, die auf einen Spalt trifft, kann mit folgender Funktion beschrieben werden:

$$E(x, y) = E_0 \begin{cases} 1 & |y| \leq b/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Dies ist das Produkt der Funktion für die Lichtwelle mit obiger Spaltfunktion.

Die Fouriertransformation ergibt:

$$\begin{aligned} F[E(x, y)] &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-i(xk_x + yk_y)) dy dx \\ &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ixk_x) dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iyk_y) dy \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \int_{-b/2}^{b/2} \exp(-iyk_y) dy \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \left(-\frac{1}{ik_y} \right) \exp(-iyk_y) \Big|_{-b/2}^{b/2} \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \frac{i}{k_y} \left(\cos(-k_y \frac{b}{2}) + i \sin(-k_y \frac{b}{2}) - \cos(k_y \frac{b}{2}) - \sin(k_y \frac{b}{2}) \right) \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \frac{i}{k_y} \left(-2i \sin(k_y \frac{b}{2}) \right) \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \frac{2}{k_y} \sin(k_y \frac{b}{2}) \\ &= E_0 \cdot \delta(k_x) \cdot b \cdot \frac{\sin(\frac{b}{2}k_y)}{(\frac{b}{2}k_y)} \end{aligned}$$

unendlicher Spalt

Im Fall eines unendlich langen, dünnen Spalts erhält man:

$$E(x, y) = E_0 \delta(x)$$

$$\begin{aligned} F[E(x, y)] &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E_0 \delta(x) \exp(-i(k_x x + k_y y)) dx dy \\ &= E_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik_y y) dy = E_0 \delta(k_y) \end{aligned}$$