

25 Jahre Quanten-Hall-Effekt

Der Quanten-Hall-Effekt dient als Widerstandsnormale in der Metrologie und hat ein Tor zu einem neuen Gebiet der Festkörperphysik aufgestoßen

Klaus von Klitzing, Rolf Gerhardt und Jürgen Weis

Für die unerwartete Entdeckung im Frühjahr 1980, dass der Hall-Widerstand in einem zweidimensionalen Elektronengas quantisierte Werte annimmt, wurde 1985 der Nobelpreis für Physik vergeben. Erst in den letzten Jahren ist es gelungen, eine kohärente Erklärung dafür zu entwickeln, dass diese quantisierten Werte, die nur von Fundamentalkonstanten abhängen, mit großer Genauigkeit an Proben aus unterschiedlichen Materialien und von unterschiedlicher Geometrie gemessen werden.

Die Geburtsstunde des Quanten-Hall-Effekts (QHE) lässt sich genau datieren, auf die Nacht vom 4. auf den 5. Februar 1980 gegen 2 Uhr morgens. Während eines Experiments am Hochfeld-Magnetlabor in Grenoble sollte unter anderem der Elektronentransport in Silizium-Feldeffekttransistoren, noch heute die grundlegenden Bauelemente höchstintegrierter Schaltungen, untersucht werden. Wie lässt sich die Ladungsträgerbeweglichkeit in diesen Bauelementen verbessern? Welche Art von Streuprozessen (verursacht durch Oberflächenrauigkeit, Grenzflächenladungen, Verunreinigungen, usw.) haben den größten Einfluss auf die Bewegung der Elektronen innerhalb der nur wenige Nanometer dicken, leitenden Schicht an der Grenzfläche zwischen Silizium und Siliziumdioxid? Zu diesem Zweck hatten G. Dorda (Siemens AG) und M. Pepper (Plessey Company) besonders ausgelegte Silizium-Feldeffekttransistoren (MOSFET) zur Verfügung gestellt (Abb. 1), die es erlaubten, im Magnetfeld Vierpunktmessungen für den gewöhnlichen (longitudinalen) elektrischen Widerstand $R_{xx} = U_x/I_x$ und für den Hall-Widerstand $R_{xy} = U_y/I_x$ an der Ladungsträgerschicht durchzuführen. Die Ladungsträgerdichte in der leitenden Schicht war mittels einer geeigneten Spannung an das Gate, d. h. einer parallelliegenden Metallplatte, veränderbar. Unter Annahme einer homogenen elektrischen Stromdichte- und Feldverteilung zwischen den spannungsabgreifenden Kontakten lassen sich aus diesen Widerstandswerten die Komponenten $\rho_{xx} = R_{xx} W/L$ und $\rho_{xy} = R_{xy}$ des spezifischen (Magneto-) Wider-

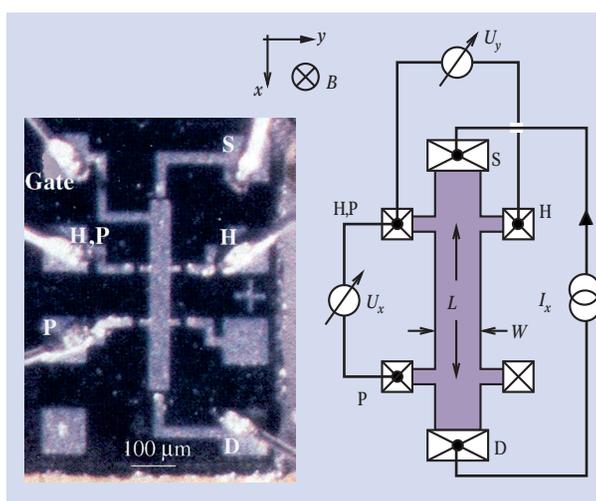


Abb. 1: Typischer Silizium-MOSFET zur Messung der xx - und xy -Komponenten des spezifischen (Magneto-)Widerstandstensors in der Ladungsträgerschicht unter dem Gate. Für einen festen Strom zwischen den Kontakten Source (S) und Drain (D) sind die Potentialabfälle zwischen den Kontakten P-P und H-H unmittelbar proportional zu den Widerständen R_{xx} und R_{xy} . Eine positive Gate-Spannung erhöht die Ladungsträgerdichte unterhalb des Gates.

standstensors $\vec{\rho}$ bestimmen, welcher die lokale Schichtstromdichte \vec{j} mit dem lokalen elektrischen Feld \vec{E} bei senkrecht zur Schicht angelegtem Magnetfeld \vec{B} verknüpft, $\vec{E} = \vec{\rho} \cdot \vec{j}$. Um störende Streuprozesse aufgrund von Elektron-Phonon-Wechselwirkungen zu unterdrücken, wurden die Experimente bei tiefen Temperaturen (typischerweise 4,2 Kelvin) sowie bei einem starken Magnetfeld (mehrere Tesla) durchgeführt.

Seit 1966 war bekannt, dass die Elektronen, die sich durch eine positive Gate-Spannung an der Oberfläche eines Silizium-Einkristalls sammeln, unter Umständen ein zweidimensionales Elektronengas (2DES) bilden [1]. Die Energie der Elektronenbewegung senkrecht zu dieser Oberfläche ist quantisiert (quantenmechanisches Teilchen „in einem Kasten“). Ist die Bewegung senkrecht zur Oberfläche aufgrund dieses Effekts komplett „eingefroren“, d. h. ist nur der niedrigste Zustand besetzt, verbleiben den Elektronen nur noch die freie Bewegung parallel zur Oberfläche: es liegt ein zweidimensionales Elektronensystem vor.¹⁾ Ein starkes Magnetfeld senkrecht zu dieser Ebene zwingt die Elektronen auf eine „Kreisbahn“ (Zyklotronbewegung), deren Energie durch die Landau-Quantisierung auf diskrete Werte eingeschränkt wird. Im Idealfall besteht dann das Energiespektrum eines 2DES aus diskreten Landau-Energieniveaus

KOMPAKT

- ▶ In einem zweidimensionalen Elektronengas und bei tiefen Temperaturen weist der Hall-Widerstand Plateaus $R_{xy} = h/ie^2$ mit $i = 1, 2, 3, \dots$ auf bei Gate-Spannungen, an denen der „gewöhnliche“, longitudinale Widerstand verschwindet.
- ▶ Die Plateaubreite und die Unabhängigkeit von Details des Experiments lassen sich im Rahmen eines Modells verstehen, in dem kompressible und stromtragende inkompressible Bereiche im Probeninneren und an den Rändern eine essenzielle Rolle spielen.

1) Der Übersichtsartikel von T. Ando, F. Fowler und F. Stern aus dem Jahr 1982 über die Eigenschaften eines 2DES bietet eine zusammenfassende Darstellung des Kenntnisstands zur Zeit der Entdeckung des QHE [2].

Prof. Dr. Klaus von Klitzing, Prof. Dr. Rolf Gerhardt und Priv.-Doz. Dr. Jürgen Weis, Max-Planck-Institut für Festkörperforschung, Heisenbergstr. 1, 70569 Stuttgart

mit Energielücken, gegeben durch die Zyklotronenergie und die Zeeman-Aufspaltung, die beide mit zunehmendem Magnetfeld größer werden. Gleichzeitig nimmt die Zustandsdichte der Landau-Niveaus zu: Die Zahl der Zustände pro Landau-Niveau und Fläche (und pro Spinorientierung) ist $n_L = B/\Phi_0$, mit der magnetischen Flussdichte B (oft kurz Magnetfeld genannt) und dem magnetischen Flussquant $\Phi_0 = h/e$ (h ist die Planck-Konstante, e die Elementarladung).

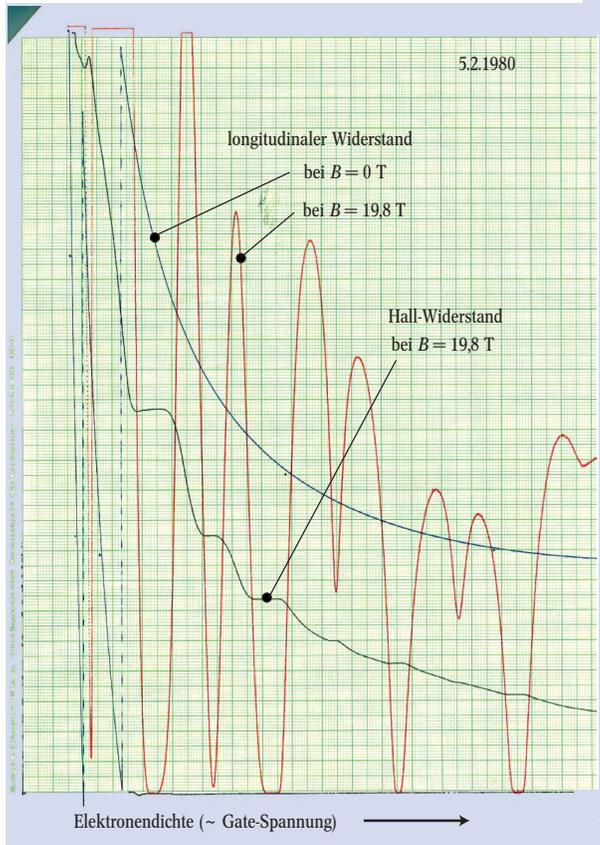


Abb. 2: Das erste Experiment zum Quanten-Hall-Effekt, durchgeführt bei der Temperatur von flüssigem Helium. Ohne Magnetfeld nimmt der elektrische Widerstand (blau) des Silizium-MOSFETs monoton als Funktion der Gate-Spannung ab, da die Elektronendichte linear mit der Gate-Spannung zunimmt. Bei einem Magnetfeld von 19,8 T weist der Hall-Widerstand (schwarz) deutliche Plateaus auf bei Gate-Spannungen, bei denen der longitudinale Widerstand (rot) verschwindet. Die Markierung zeigt auf das quantisierte Hall-Plateau um den Füllfaktor $\nu = 4$.

In einem homogenen 2DES mit der Elektronen-Flächendichte n_s wird der (Landau-Niveau-) Füllfaktor $\nu = n_s/n_L = h/e \cdot n_s/B$ für bestimmte Werte des Verhältnisses n_s/B ganzzahlig, $\nu = i$. Der spezifische Hall-Widerstand sollte demnach den Wert $\rho_{xy} = B/(en_s) = h/(ie^2)$ annehmen. Überraschenderweise lassen sich diese Werte als globale Hall-Widerstandswerte $R_H = R_{xy}$ beobachten, und dann nicht nur für diskrete Werte von n_s/B , sondern über breite Bereiche in n_s/B , wenn die Temperatur so niedrig ist, dass thermische Anregungen über die Energielücke an der Fermi-Kante nicht möglich sind. Abb. 2 zeigt die experimentellen Kurven mit den charakteristischen Plateaus im Hall-Widerstand R_{xy} und den korrespondierenden Nullstellen im elektrischen Längswiderstand R_{xx} , mit denen der QHE entdeckt wurde.

Die endlichen Bereiche der Gate-Spannung, in denen die Widerstände R_{xx} und R_{xy} unverändert bleiben, führten zu der Vermutung, dass dort die von der Gate-Spannung influenzierten Elektronen nicht zum

elektronischen Transport beitragen, sondern *lokalisierte Zustände* besetzen. Die Bedeutung lokalisierter Elektronen für Hall-Effekt-Messungen war jedoch nicht recht klar, und die meisten Experimentatoren glaubten, der Hall-Effekt messe nur die *delokalisierten* Elektronen. Die unerwartete Entdeckung in der Nacht vom 4. auf den 5. Februar 1980, für die im Jahre 1985 der Nobelpreis für Physik vergeben wurde, lag darin, dass die experimentell bestimmten Plateauwerte für den Hall-Widerstand R_{xy} weder von der Stärke des Magnetfeldes und dem Wert für die Gatespannung abhängen noch von lokalisierten Zuständen und anderen Materialparametern beeinflusst werden. Die Plateauwerte lassen sich mit hoher Genauigkeit durch die Beziehung $R_{xy} = h/(ie^2)$ ($i=1, 2, 3, \dots$) beschreiben.²⁾

Die Hall-Widerstandswerte in den Quanten-Hall-Plateaus hängen auch nicht von geometrischen Details des Bauelements ab. Da in solchen Plateaus der longitudinale Widerstand verschwindet, $R_{xx} = 0$, misst man selbst dann den exakt quantisierten Wert für den Hall-Widerstand, wenn die Hall-Spannung an nicht genau gegenüberliegenden Kontakten abgegriffen wird. Wegen der Zweidimensionalität des Elektronensystems ist bei homogener Elektronendichte der Hall-Widerstand $R_{xy} = \rho_{xy}$ unabhängig von der (meist nicht extrem genau bekannten) Probenbreite, sodass sich ρ_{xy} direkt mithilfe eines Volt- und Amperemeters messen lässt (diese Tatsache war von vielen Theoretikern übersehen worden).

Die wichtigste Gleichung im Zusammenhang mit dem quantisierten Hall-Widerstand, $U_H = h/e^2 \cdot I$, wurde im ersten Experiment mit einer solchen Genauigkeit bestätigt, dass selbst der endliche Eingangswiderstand von $1\text{ M}\Omega$ des zur Spannungsmessung eingesetzten x-y-Rekorders als Korrektur berücksichtigt werden musste. Ein von der Geometrie des Bauteils und von mikroskopischen Details des Materials unabhängiger elektrischer Widerstand war natürlich von großer Bedeutung für metrologische Institute wie das National Bureau of Standards (NBS) in den USA (heute National Institute of Standards and Technology, NIST) oder die Physikalische-Technische Bundesanstalt (PTB) in Deutschland. Daher wurden bereits einen Tag nach der Entdeckung Gespräche mit der PTB über dieses neue Quantenphänomen (die Verknüpfung mit der Planck-Konstante h macht dies offensichtlich) aufgenommen.

Die Ergebnisse wurden bei Physical Review Letters unter dem Titel „Realization of a Resistance Standard based on Fundamental Constants“ eingereicht. Ein Gutachter machte die Autoren jedoch darauf aufmerksam, dass man (damals) weniger einen genaueren elektrischen Widerstand benötigte als einen besseren Wert für die fundamentale Konstante h/e^2 . Interessanterweise ist h/e^2 proportional zum Inversen der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten α , d. h. $\alpha^{-1} = (h/e^2)(2/\mu_0 c) = 137,036\dots$, wobei die magnetische Feldkonstante $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ N/A}^2$ und die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ damals und heute fest definierte Werte haben. Tatsächlich war die Ungenauigkeit bei der Darstellung der elektrischen Einheit von 1 Ohm im Internationalen Einheitensystem (SI-System) kleiner (bis 1985) als die Unsicherheit im Wert für h/e^2 bzw. für α^{-1} . Daher wurde der Titel der Veröffentlichung abgeändert in „New Method for High-Accuracy Determination of the Fine-Structure Constant based on Quantized Hall Resistance“ [3].

Heutzutage wird der 1980 entdeckte Effekt als ganzzahliger Quanten-Hall-Effekt (engl.: Integer Quantum

2) In Si-MOSFETs gibt es aufgrund der Bandstruktur für die hier gewählte Magnetfeld- und Kristallrichtung zu jeder Landau-Quantenzahl vier Landau-Niveaus, die sich durch die Spin-Orientierung der Elektronen und ihre Zugehörigkeit zu den Leitungsbandminima unterscheiden.

Hall Effect, IQHE) bezeichnet, denn ab 1982 wurden an zweidimensionalen Elektronensystemen von besserer Qualität in modulationsdotierten GaAs/Al_xGa_{1-x}As-Heterostrukturen³⁾ Hall-Plateauwerte gefunden, für die $R_H = h/(f e^2)$ mit einer gebrochen-rationalen Zahl f gilt. Die Werte $f = 1/3$ und $f = 2/3$ sind die prominentesten Beispiele. Für die Entdeckung dieses unerwarteten „fraktionalen“ Quanten-Hall-Effekts (engl.: Fractional Quantum Hall Effect, FQHE), erhielten Dan C. Tsui, Horst L. Störmer und Robert B. Laughlin 1998 den Nobelpreis.

In den folgenden Jahren stieg die Anzahl der Veröffentlichungen mit dem Stichwort „Quantum Hall Effect“ in Titel oder Abstract drastisch an, auf heutzutage ungefähr eine Publikation pro Tag. Inzwischen wird der QHE nicht nur in der Festkörperphysik, sondern in nahezu allen Bereichen der modernen Physik diskutiert. So reicht das Spektrum der veröffentlichten Arbeiten von „Quantum Computing“ in Quanten-Hall-Systemen über Quanten-Hall-Quarks bis hin zum höherdimensionalen QHE in der String-Theorie. Bisher erschienen über zehn Bücher zum Quanten-Hall-Effekt.⁴⁾

Quanten-Hall-Effekt und Metrologie

Die wichtigste Anwendung des Quanten-Hall-Effekts beruht auf der Tatsache, dass Quanten-Hall-Plateaus als Funktion von Elektronendichte oder Magnetfeld flach sind (Abb. 3) und dass der quantisierte Hall-Widerstand (um Füllfaktor $\nu = 1$) offensichtlich immer den fundamentalen Wert $h/e^2 = 25812,807... \text{ Ohm}$ hat. Dieser Wert hängt weder vom Material noch von der Geometrie oder den mikroskopischen Details des Halbleiterbauelementes ab, in dem sich das zweidimensionale Ladungsträgersystem befindet. Nach der Entdeckung dieses makroskopischen Quanteneffekts wurde das Experiment von vielen metrologischen Instituten mit weitaus größerer Genauigkeit wiederholt, als es in einem Forschungslabor möglich ist. Der Effekt erwies sich dabei als außergewöhnlich stabil und reproduzierbar. Offensichtlich beruht die Ungenauigkeit der Bestimmung des Widerstandwertes hauptsächlich auf der Unsicherheit bei der Darstellung des SI-Ohms. Aus den international akzeptierten Definitionen für die fundamentalen SI-Einheiten Sekunde, Meter, Kilogramm und Ampere folgt, dass alle mechanischen und elektrischen Größen wohl definiert sind. Allerdings lässt sich die fundamentale Einheit Ampere nur mit vergleichsweise großem Fehler von 10^{-6} darstellen, wenn man sie definitionsgemäß aus der Kraft zwischen zwei stromdurchflossenen Drähten gewinnt. Damit hat die abgeleitete Einheit $1 \Omega = 1 \text{ s}^{-3} \text{ m}^2 \text{ kg A}^{-2}$, die somit von allen fundamentalen Einheiten abhängt, sogar noch einen größeren Fehler als 10^{-6} . Heutzutage ist die SI-Einheit Ohm mit einem kleineren Fehler bekannt als die fundamentale Einheit Ampere, was darauf zurückzuführen ist, dass sich ein Widerstand als Wechselstromimpedanz $|Z(\omega)| = 1/\omega C$ einer Kapazität C realisieren lässt.

Da die Kapazität C eines Kondensators nur von der Geometrie (bei Vakuum als dielektrisches Medium) abhängt, lässt sich ein SI-Ohm ausschließlich unter Verwendung der fundamentalen Einheiten für die Zeit (bzw. die Frequenz $\omega/2\pi$) und die Länge (für einen berechenbaren sog. Thompson-Lampart-Kondensator [4]) realisieren. Da diese sehr genau bekannt sind, lässt sich auch die SI-Einheit Ohm mit einem Fehler von ungefähr 10^{-7} darstellen und damit über den QHE auch die Feinstrukturkonstante. Der quantisierte Hall-

Widerstand ist jedoch stabiler und reproduzierbarer als irgendein anderer Widerstand, der in SI-Einheiten erreicht wurde, sodass das Comité Consultatif d'Electricité vorschlug, als gebräuchlichen Wert für die von-Klitzing-Konstante R_K exakt $25\,812,807 \Omega$ mit der Bezeichnung R_{K-90} zu übernehmen. Dieser Wert R_{K-90} wurde ab dem 1. 1. 1990 als Referenzwert für Widerstandseichungen übernommen und wird nunmehr als *festgelegte* von-

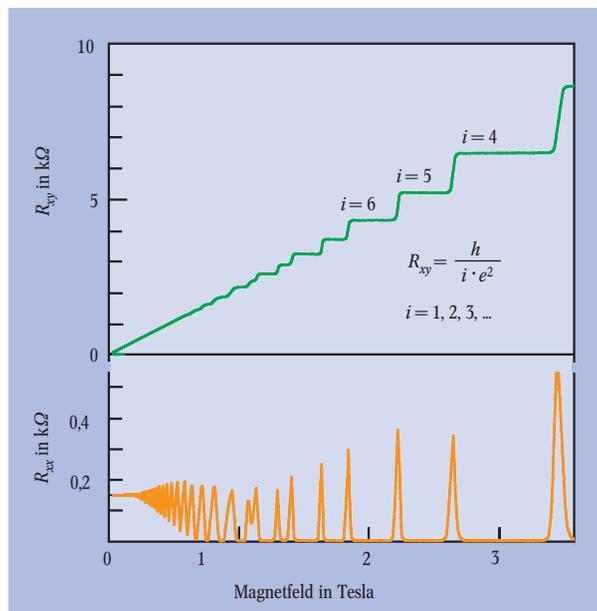


Abb. 3: Typischer Verlauf des Hall- und des Längs-Widerstandes R_{xy} bzw. R_{xx} eines 2DES, wie er als Funktion des Magnetfeldes B bei Proben mittlerer Qualität gemessen wird.

Klitzing-Konstante (engl.: *conventional* von-Klitzing constant) bezeichnet [5]. Direkte Vergleiche durch verschiedene nationale Institute zeigten Abweichungen von weniger als $2 \cdot 10^{-9}$ für die Referenzwerte [6], sofern die veröffentlichten Richtlinien für eine verlässliche Messung eingehalten werden [7]. Leider lässt sich diese hohe Reproduzierbarkeit und Stabilität des quantisierten Hall-Widerstands nicht unmittelbar zu einer entsprechend genauen Bestimmung der Feinstrukturkonstanten verwenden, da der Wert des quantisierten Hall-Widerstands in SI-Einheiten nicht so genau bekannt ist. Erst in Verbindung mit anderen Experimenten, beispielsweise Hochpräzisionsmessungen (und Berechnungen) des anomalen magnetischen Moments des Elektrons, des gyromagnetischen Verhältnisses von Protonen oder der Neutronenmasse, erhält man einen besten Fit für den Wert der Feinstrukturkonstanten mit einem Fehler von nur $3,3 \cdot 10^{-9}$, was für die von-Klitzing-Konstante zu einem Wert von $R_K = (25812,807449 \pm 0,00086) \Omega$ führt (CODATA 2002)⁵⁾. Sehr genaue Werte für fundamentale Konstanten (besonders für α) sind wichtig im Zusammenhang mit Vermutungen, wonach einige der fundamentalen Konstanten zeitabhängig sind. Experimentelle Hinweise auf eine kosmische Evolution der Feinstrukturkonstanten α werden allerdings angezweifelt und konnten bisher auch nicht bestätigt werden. Die Änderung $|\partial\alpha/\partial t|$ ist – wenn sie überhaupt existiert – kleiner als 10^{-16} pro Jahr.

Eine Kombination aus Quanten-Hall-Effekt und Josephson-Effekt (mit dem sich die elektrische Spannung in Einheiten von h/e darstellen lässt) ermöglicht einen Vergleich der elektrischen Leistung (die von der Planck-Konstanten h abhängt) mit der mechanischen Leistung (die von der Masse m abhängt). Aus Messungen mit einer so genannten Watt-Waage erhält man den besten Wert für die Planck-Konstante [8], wobei die

3) Bei diesen Strukturen sind Donatoren und freie Elektronen voneinander getrennt, sodass höchste Elektronenbeweglichkeiten bei tiefen Temperaturen erzielt werden.

4) siehe www.fkf.mpg.de/klitzing/

5) Die aktuellsten Werte für von CODATA empfohlene fundamentale Konstanten findet man bei: <http://physics.nist.gov/cuu/constants/index.html>

6) vgl. hierzu den Artikel von Ernst Göbel, Physik. Blätter, Januar 2001, S. 35.

Masse auf der Basis des Urkilogramms (welches zeitlich nicht stabil ist) genau bekannt sein muss. Umgekehrt kann man auch die Planck-Konstante festlegen und erhält auf diese Weise eine neue Realisierung der Einheit der Masse⁶⁾ (ebenso wie die Festlegung der Lichtgeschwindigkeit zu einer neuen Realisierung der Einheit „Länge“ führte). Zur Zeit werden Vorschläge diskutiert, nicht nur die Planck-Konstante h , sondern auch die Elementarladung e (und somit den quantisierten Hall-Widerstand) als Fundamentalkonstante exakt festzulegen, wodurch die bisherigen Definitionen für die Basiseinheiten Kilogramm und Ampere wegfallen würden.

Physik des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts

Ein Teilchen mit der elektrischen Ladung q ($q = -e$ für Elektronen), das sich mit der Geschwindigkeit \vec{v} in einem homogenen Magnetfeld \vec{B} bewegt, erfährt die zu \vec{v} und \vec{B} senkrechte Lorentz-Kraft $\vec{F} = q(\vec{v} \times \vec{B})$. In einer stromdurchflossenen (dreidimensionalen) Leiterschicht der Dicke d baut sich bei senkrecht angelegtem Magnetfeld B daher eine Hall-Spannung U_H auf, $U_H = R_H(B) \cdot I$ (benannt nach Edwin Hall, der diesen Effekt 1879 zum ersten Mal beschrieb). Im Rahmen des Drude-Modells, das die Elektronen als klassisches Gas beschreibt, hat der Hall-Widerstand die Abhängigkeit

$$R_H = B / (q n_q d)$$

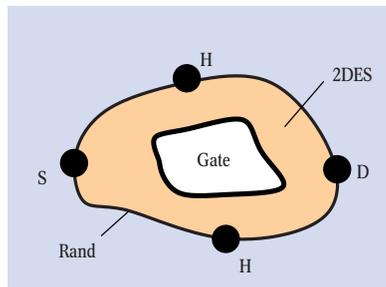
und eignet sich daher, um die wesentlichen Eigenschaften elektrischer Leiter, die freie Ladungsträgerkonzentration n_q und das Vorzeichen von q (Löcher bzw. Elektronen) zu bestimmen.

Für ein zweidimensionales Elektronensystem lässt sich das Produkt $n_q \cdot d$ zur Flächendichte n_s zusammenfassen, sodass sich der Hall-Widerstand vereinfacht zu

$$|R_H| = |B / (-e n_s)|.$$

Tatsächlich steigt bei kleinen Magnetfeldern der Hall-Widerstand linear mit dem Magnetfeld an, und aus der Steigung lässt sich die Flächendichte n_s des zweidimen-

Abb. 4: Der gemessene quantisierte Hall-Widerstandswert ist unabhängig von den Elektronendichteveränderungen im Innern des 2DES, solange etwa die Gate-Elektrode nicht von Rand zu Rand reicht. Selbst ein Loch (herausgeätztter Bereich) hat keinen Einfluss. Auch die genaue Lage der potentialabgreifenden Kontakte ist nicht wichtig, solange die stromtragenden Kontakte S und D dazwischenliegen.



sionalen Elektronensystems bestimmen (Abb. 3). Erst bei höheren Magnetfeldern treten die Plateaus im Hall-Widerstand auf, beschrieben durch

$$|R_H| = h / (v e^2),$$

wobei v einer ganzen Zahl $i = 1, 2, 3, \dots$ (oder gewissen Bruchzahlen im fraktionalen QHE) entspricht. Wir sehen hier den fundamentalen Unterschied zwischen dem Hall-Widerstand eines 2DES bei kleinen und bei großen Magnetfeldern: Während er es bei kleinen B -Feldern erlaubt, Materialeigenschaften (Elektronendichte n_s) zu bestimmen, sind die Quanten-Hall-Widerstandswerte in hohen Magnetfeldern völlig unabhängig von Materialeigenschaften.

Wenn im Hall-Widerstand ein Plateau gefunden

wird, verschwindet der in einer Vierpunktanordnung gemessene longitudinale Widerstand R_{xx} : Das Auftreten des Quanten-Hall-Plateaus ist begleitet von einem dissipationfreien Stromfluss entlang der Hall-Probe. Dies bedeutet aber nicht, dass überhaupt keine Dissipation auftritt. Tatsächlich entspricht der Zweipunkt-Widerstand, der durch den Spannungsabfall zwischen den stromtragenden Kontakten S und D gemessen wird, im Quanten-Hall-Regime etwa R_H , d. h., die elektrische Leistung $R_H \cdot I^2$ wird dissipiert. Diese Joulesche Wärme wird an gegenüberliegenden Ecken nahe den stromtragenden Kontakten erzeugt, was sich mittels des Fontäneneffekts von suprafluidem Helium im Jahre 1991 visualisieren ließ [9].

Doch wie sind diese ausgezeichneten Hall-Widerstandswerte und das Verschwinden von Dissipation zu verstehen? Ein senkrecht zur Schichtebene angelegtes Magnetfeld zwingt die Elektronen auf Zyklotron-Bahnen. Die quantenmechanisch möglichen Energieeigenwerte eines homogenen 2DES fallen auf diskrete Landau-Niveaus,

$$\epsilon_{n,s_z} = (n + 1/2) \hbar \omega_c + s_z g^* \mu_B B,$$

mit der Zyklotron-Energie $\hbar \omega_c = \hbar e B / m^*$, dem Landau-Niveau-Index $n = 1, 2, 3, \dots$, der Spinquantenzahl $s_z = \pm 1/2$, dem Bohrschen Magneton $\mu_B = e \hbar / (2m)$ und dem effektiven Landé-Faktor g^* . Jedes Energie-Niveau besitzt den Entartungsfaktor $n_L = e B / h$. Da die Entartung der Landau-Niveaus und deren Energiedifferenz mit zunehmendem Magnetfeld B ansteigen, werden die Elektronen bei konstanter Elektronendichte mit zunehmendem B zu Landau-Niveaus geringerer Energie umverteilt. Dies führt zu einem sägezahnartigen Verlauf der Fermi-Energie (des chemischen Potentials μ_{ch}) als Funktion von B , was sich durch Verwendung eines metallischen Einzelelektronen-Transistors als lokales Elektrometer experimentell direkt nachweisen lässt [10]. Für bestimmte Werte von B wird der Landau-Niveau-Füllfaktor $\nu = n_s / n_L$ ganzzahlig, und das Fermi-Niveau liegt zwischen zwei Landau-Niveaus.

Existiert zusätzlich ein homogenes elektrisches Feld E_y in y -Richtung, so vollführen die quantenmechanischen Elektronen-Eigenzustände aller Landau-Niveaus eine Driftbewegung in x -Richtung, sodass die lokale Stromdichte j_x in x -Richtung bei Füllfaktor ν gegeben ist durch

$$j_x = \nu \frac{e^2}{h} E_y. \tag{1}$$

Integriert man die Schichtstromdichte $j_x(y)$ über eine gewisse Breite w in y -Richtung, so ist der integrale Strom $I_x = \int_0^w j_x(y) dy$ mit dem Spannungsabfall $U_y = \int_0^w E_y(y) dy$ über w verknüpft durch

$$I_x = \nu \frac{e^2}{h} U_y. \tag{2}$$

Nimmt der Füllfaktor ganzzahlige Werte an, $\nu = i$, so ergibt sich der Hall-Widerstand $R_H = U_y / I_x = h / (i e^2)$. Dieser Hall-Strom (1) fließt ohne Dissipation, denn die Stromkomponente steht senkrecht zum treibenden elektrischen Feld. Da bei ganzzahligen Füllfaktoren keine Zustände an der Fermi-Kante existieren, sind auch keine Streuprozesse für Elektronen aus besetzten in unbesetzte Zustände möglich. Der spezifische Längswiderstand verschwindet, $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$. Ist dies nun schon die gesamte Physik? Nein, wir erhalten aus den Betrachtungen an einem idealen homogenen 2DES

unendlicher Ausdehnung keineswegs Quanten-Hall-Plateaus, da die Bedingung für ganzzahlige Füllfaktoren nur für ganz bestimmte Magnetfeldwerte und nicht für Magnetfeldbereiche erfüllt sind. Außerdem sind reale Proben endlich, d. h. durch Ränder begrenzt, und besitzen kurzreichweitige statische Potentialfluktuationen,

Untersuchungen zur Stromverteilung haben zu einem etwas anderem mikroskopischen Bild des QHE geführt.

Kompressible und inkompressible Bereiche

Mittels eines Tieftemperatur-Rasterkraftmikroskopes wurden die Hall-Potentialprofile, d. h. die Änderungen der elektrostatischen Potentiallandschaft bei eingespeistem Strom I_x gegenüber dem thermodynamischen Gleichgewicht ($I_x = 0$), für verschiedene Füllfaktoren unter Quanten-Hall-Bedingungen gemessen [13]. Abb. 5 zeigt typische Hall-Potentialprofile, gemessen an Proben von 10 bis 15 μm Breite (bedingt durch den eingeschränkten Rasterbereich): (a) Für Magnetfelder oberhalb eines Quanten-Hall-Plateaus fällt die Hall-Spannung linear über die gesamte Probenbreite ab. Die Stromdichte ist homogen über die Probe verteilt. (b) Mit Eintritt ins Plateau fällt die Hall-Spannung nicht-linear (und oft auch nicht monoton [13]) über die Probenmitte ab. Obwohl in diesem Bereich kleinste Magnetfeldänderungen das Hall-Potentialprofil und damit die Stromverteilung verändern, wird doch der quantisierte Wert für R_H gemessen. (c) Mit weiterer Abnahme des Magnetfeldes, aber immer noch innerhalb des Plateaus, fällt nun die Hall-Spannung etwa in gleichen Teilen in der Nähe beider Ränder ab, während im Innern kein Abfall zu beobachten ist. Der Strom fließt in der Nähe der Ränder. (d) Mit Verlassen des Plateaubereichs zu niedrigen Magnetfeldern wird im Innern ein linearer Abfall beobachtet, dessen Steigung anwächst, während der Potentialabfall an den Rändern kleiner wird, bis letztendlich vor dem Eintritt ins nächste Plateau wieder ein linearer Abfall beobachtet wird. Das soeben geschilderte Verhalten der Hall-Potentialprofile und damit der Stromverteilung wiederholt sich für jedes Quanten-Hall-Plateau (Abb. 6). Doch was zeichnet die Positionen des Hall-Spannungsabfalls aus? Dazu ist es wichtig, sich die Randstruktur zweidimensionaler Elektronensysteme näher anzuschauen.

An den Rändern eines zweidimensionalen Elektronensystems steigt in der etwa $1\mu\text{m}$ breiten Verarmungszone die Elektronendichte von Null auf den Wert des Innern an. Im thermodynamischen Gleichgewicht können Elektronendichteprofil und effektives Potential im Rahmen Hartree-artiger Näherungen selbstkonsistent

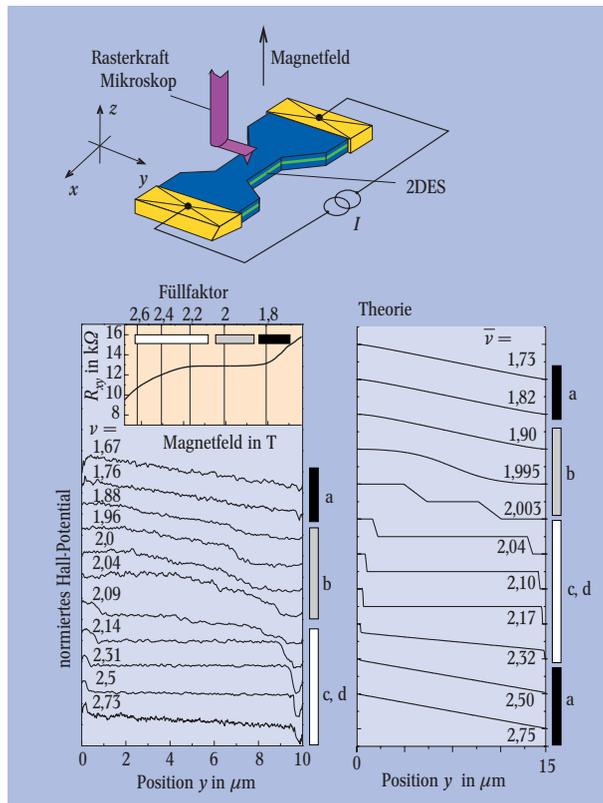


Abb. 5: Hall-Potentialprofile für verschiedene Magnetfelder, angegeben als Füllfaktoren ν , die quer über die Engstelle der oben links skizzierten Probe gemessen wurden. Zum Vergleich ist der Hall-Widerstand R_{xy} für diesen Magnetfeldbereich gezeigt, nach [13]. Die füllfaktorabhängigen Charakteristika des Potentialverlaufs sind: linearer Verlauf (Typ a), Abfall über inkompressiblen Streifen (Typ c, d), und nichtlinearer Abfall im Probeninnern (Typ b) sehr nahe bei ganzzahligem Füllfaktor. Rechts: Berechnete Hall-Potentialprofile für eine $15\mu\text{m}$ breite Probe, nach [16].

die zu Streuung der Elektronen und damit zur energetischen Verbreiterung der Landau-Niveaus und teilweisen Lokalisierung der Elektronen führt. Langreichweitige statische Potentialfluktuationen verursachen inhomogene Elektronendichteverteilungen im 2DES. Folglich ist die Annahme eines idealen homogenen 2DES, die von Gl. (1) zu Gl. (2) führt, i. a. nicht erfüllt.

Experimentell gibt es viele Hinweise, dass im Plateaubereich des QHE die Details des Probeninneren keine Rolle spielen: Man kann es teilweise herauschneiden oder lokal eine andere Elektronendichte einstellen, ohne den quantisierten Wert des gemessenen Hall-Widerstands zu ändern. Auch spielt die genaue Anordnung der Kontakte eine untergeordnete Rolle (Abb. 4). Dies wurde nun als Hinweis gedeutet, dass die relevanten Ströme in der Nähe des Probenrandes fließen. Das ab 1988 wesentlich von M. Büttiker [11] geprägte Randkanalbild des IQHE hat sich sehr bewährt bei der Beschreibung der an komplizierten Proben mit vielen Kontakten und Gates gemessenen Widerstände. Deshalb wird dies Bild zum IQHE gerne in Lehrbüchern verwendet [12]. Wir wollen auf dieses hier nicht näher eingehen, denn jüngere experimentelle

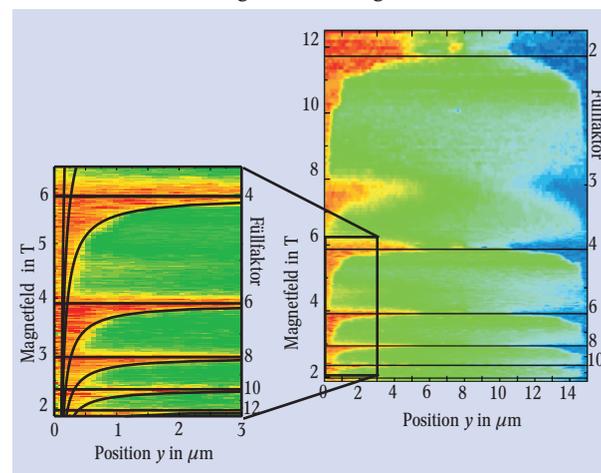


Abb. 6: Farbkodierte Auftragung des Hall-Potentialprofils, gemessen über einen großen Magnetfeldbereich, der mehrere Quanten-Hall-Plateaus umfasst. Wie in der Vergrößerung gezeigt, fällt die Hall-Spannung an den Positionen der innersten inkompressiblen Streifen, beschrieben durch Gl. (3) ab. (nach [13])

berechnet werden: Durch Lösen der Poisson-Gleichung gewinnt man aus dem Dichteprofil das effektive Potential. Dieses geht in die Schrödinger-Gleichung ein und bestimmt Energieeigenwerte und -zustände, die nach Maßgabe der Fermi-Dirac-Statistik mit räumlich konstantem elektrochemischem Potential besetzt werden und das Dichteprofil festlegen. Im Rahmen der einfacheren Thomas-Fermi-Näherung vernachlässigt man die Ausdehnung der Wellenfunktionen auf der Längenskala, auf der sich das effektive Potential ändert, und vermeidet so die Lösung der Schrödinger-Gleichung. In dieser Näherung kann man das elektrochemische

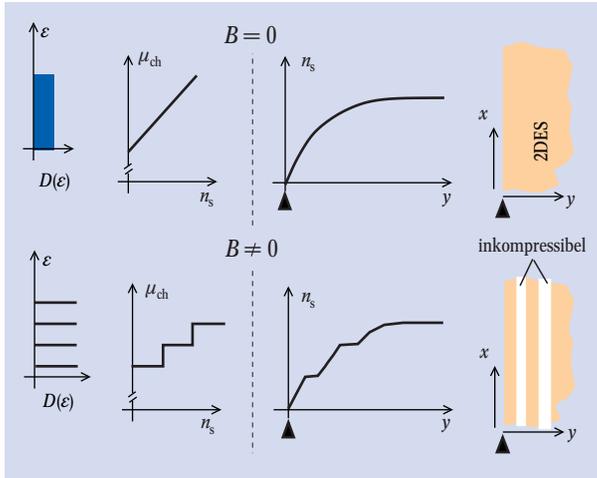


Abb. 7: Skizze von Zustandsdichte $D(\epsilon)$, chemischem Potential $\mu_{ch}(n_s)$ als Funktion der Elektronendichte n_s , und Verlauf von $n_s(y)$ am Probenrand für verschwindendes Magnetfeld, $B=0$, und für einen festen Wert $B \neq 0$. Rechts sind die kompressiblen Bereiche (mit Zuständen nahe der Fermi-Kante) als dunkle Streifen entlang des Probenrandes angedeutet.

Potential als Summe aus der elektrostatischen Energie $-e\phi(y)$ und einem chemischen Potential beschreiben, das mit der lokalen Dichte über die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ des homogenen Elektronensystems verknüpft ist [14–16]. Abb. 7 zeigt schematisch das Ergebnis einer solchen Rechnung, wie es von D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii und L. I. Glazman 1992 erstmals diskutiert wurde [17]: Ohne angelegtes Magnetfeld ist die Zustandsdichte $D(\epsilon)$ konstant, und deshalb steigt das chemische Potential μ_{ch} linear mit n_s an. Als Resultat zeigt das Dichteprofil keine besondere Struktur vom Rand ins Innere. Ganz anders bei angelegtem Magnetfeld: Die Zustandsdichte ist diskret, das chemische Potential steigt stufenartig mit zunehmendem n_s an und deshalb ist ein Dichteprofil mit abwechselnden Bereichen konstanter und ansteigender Elektronendichte energetisch vorteilhafter. Entlang der Ränder bildet sich eine streifenartige Struktur aus, in der sich die Streifen konstanter Elektronendichte inkompressibel verhalten ($\partial\mu_{ch}/\partial n_s \rightarrow \infty$), die variierender Elektronendichte kompressibel. In den kompressiblen Bereichen existieren besetzte und unbesetzte Elektronenzustände am Fermi-Niveau, die eine isoenergetische Umbesetzung zur elektrischen Abschirmung möglich machen, in den inkompressiblen Bereichen liegen besetzte Zustände unterhalb der Fermi-Niveaus, unbesetzte oberhalb, sodass dort elektrische Felder durch Elektronenumbesetzung nicht abgeschirmt werden können. Die inkompressiblen Bereiche zeichnen sich dadurch aus, dass dort lokal ein ganzzahliger Füllfaktor vorliegt.

Die Breite und Position dieser kompressiblen

und inkompressiblen Streifen hängt vom Einschlusspotential am Rande und von der Quantisierungsenergie (Zyklotron- und Zeeman-Energie) ab, die mit zunehmendem Magnetfeld ansteigen. Deshalb verschieben die Streifen mit zunehmendem Magnetfeld vom Rand weg ins Innere und bei ganzzahligen Werten des Füllfaktors vereinigen sich die innersten inkompressiblen Streifen beider Ränder und umfassen das gesamte Innere. Für geätzte Probenränder lassen sich die Position $y_v \equiv |y - y_{Rand}|$ des innersten inkompressiblen Streifens und dessen Breite a_v analytisch durch den Füllfaktor ν im Innern ausdrücken,

$$y_v = \frac{d_0}{1 - \left(\frac{\text{int}(\nu)}{\nu}\right)^2}, \quad a_v = \frac{4y_v}{\nu} \sqrt{\frac{\text{int}(\nu) a_B^*}{\pi d_0}}, \quad (3)$$

wobei die Abschirmlänge d_0 u. a. von der mittleren Elektronendichte abhängt und a_B^* den effektiven Bohrradius im Material angibt ($\text{int}(\nu)$ ist der ganzzahlige Anteil von ν). Mittels Einzelelektronen-Transistoren als lokale Elektrometer gelang es, diese Streifenstruktur im Verarmungsbereich eines 2DES sichtbar zu machen [18].

Verwendet man die allgemeiner gültige nicht-lokale Hartree-Näherung zur selbstkonsistenten Berechnung der Randstruktur [16], so erkennt man, dass die in der Thomas-Fermi-Näherung berechneten inkompressiblen Streifen mit einer Breite unterhalb der magnetischen Länge $\ell = (\hbar/eB)^{1/2}$, die die Ausdehnung der Wellenfunktionen charakterisiert, nicht existieren. So ist zu erwarten, dass nicht alle äußeren inkompressiblen Streifen am Rande vorhanden sind bzw. isolierend wirken, insbesondere bei steilem Randpotential und kleinen Magnetfeldern. Auch eine Erhöhung der Temperatur lässt diese verschwinden. Die innersten inkompressiblen Streifen zeichnen sich dadurch aus, dass sie die größte Breite besitzen und bei ganzzahligen Füllfaktoren das gesamte Probeninnere einnehmen.

Kompressible und inkompressible Bereiche sind nicht nur am Rande, sondern aufgrund langreichweitiger statischer Potentialfluktuationen, die zu inhomogenen Elektronendichten führen, auch im Innern der Probe zu erwarten. Diese Landschaft aus inkompressiblen und kompressiblen Bereichen im Probeninnern wird sich mit Änderungen der mittleren Elektronendichte oder dem Magnetfeld stark verändern. Nahe ganzzahliger Füllfaktoren (errechnet aus einer mittleren Elektronendichte) wird das Innere aus einem zusammenhängenden inkompressiblen Gebiet bestehen, das nur durch inselartige kompressible Bereiche unterbrochen wird. Abb. 8 zeigt schematisch diese Entwicklung mit zunehmendem Magnetfeld über ein Quanten-Hall-Plateau.⁷⁾

Damit lassen sich nun die Resultate der Hall-Potential-Messungen verstehen: Die beiden Positionen, an denen der größte Hall-Spannungsabfall stattfindet, stimmen für den jeweiligen Magnetfeldwert mit den Positionen der (im Thomas-Fermi-Bild innersten) inkompressiblen Streifen an beiden Rändern überein, die ohne Anpassparameter durch y_v in Gl. (3) beschrieben werden. Wir stellen also fest: Nähert man sich dem Quanten-Hall-Plateau von niedrigen Magnetfeldern, so fließt der von außen aufgeprägte Strom zuerst weitestgehend, dann vollständig in den innersten inkompressiblen Streifen entlang der Probe. Diese inkompressiblen Streifen an beiden Rändern werden breiter und verschoben zur Probenmitte, bis das ganze Probeninnere

inkompressibel ist, unterbrochen durch inselartige Bereiche mit lokal anderen Füllfaktoren, um die sich dann der Strom dissipationfrei, getrieben durch den lokalen Hall-Potentialabfall, „schlängelt“ (siehe [13]).

Auf diesen experimentellen Ergebnissen basierende Modellrechnungen für schmale Hall-Proben zeigen, dass einerseits inkompressible Streifen nur in gewissen Magnetfeldbereichen existieren, und andererseits bei Existenz inkompressibler Streifen der gesamte Strom durch diese Streifen fließt [15, 16]. Da in den inkompressiblen Streifen ein ganzzahliger Füllfaktor $\nu = i$ vorliegt, sind dort die lokale Stromdichte und das Hall-Feld gemäß Gl. (1) verknüpft. Da die Hall-Spannung ausschließlich über inkompressible Bereiche gleichen Füllfaktors abfällt, ergibt sich die globale Beziehung (2), und es folgt daraus die entsprechende Quantisierung der globalen Widerstände $R = 0$ und $R_H = h/(ie^2)$, und zwar mit einer Ungenauigkeit, die im Grenzfall tiefer Temperaturen exponentiell klein wird. Die Breite der Quanten-Hall-Plateaus ist mit der Existenz inkompressibler Streifen endlicher Breite entlang der Ränder korreliert. Lokalisierung oder Inhomogenitäten *innerhalb der Probe* sind also nicht notwendigerweise Voraussetzung für den IQHE, schon die unausweichliche Abnahme der Elektronendichte am Rande kann ausreichen.

Zusammenfassung

In den 25 Jahren des ganzzahligen Quanten-Hall-Effekts wurden viele Modelle entwickelt, um diesen mikroskopisch zu erklären. Der Schwerpunkt lag dabei entweder auf dem Rand oder dem Probeninnern, doch beide Probenbereiche sind von gleicher Bedeutung für den Quanten-Hall-Effekt: Mit Anlegen einer elektrochemischen Potentialdifferenz zwischen Kontakt S und D wird das Potential von S mittels der kompressiblen Streifen entlang des einen Randes, das Potential von D mittels der kompressiblen Streifen entlang des anderen Randes in x -Richtung in die Probe hineingetragen. Die elektrochemische Potentialdifferenz ist somit als Hall-Spannung in y -Richtung präsent. Besteht die Landschaft im Innern zusammenhängend aus inkompressiblen Bereichen, allenfalls inselartig unterbrochen durch Bereiche mit lokal anderen Füllfaktoren, so treibt das mit der Hall-Spannung verbundene elektrische Feld $E_y(y)$ den Hall-Strom dissipationfrei (senkrecht zum elektrischen Feld) durch den inkompressiblen Bereich im Innern der Probe. Da die Hall-Spannung nur über inkompressible Bereiche gleichen Füllfaktors abfällt, erhält man den wohldefinierten Hall-Widerstandswert. Der detaillierte Hall-Potentialabfall ist dabei unerheblich. Die Inhomogenitäten in der Elektronendichte und Lokalisierung von Elektronen durch Potentialfluktuationen im Innern der Probe gewährleisten, dass bei moderaten Änderungen der mittleren Elektronendichte oder des Magnetfeldes ein inkompressibler, isolierender Bereich über das gesamte Probeninnere zusammenhängend erhalten bleibt – der quantisierte Hall-Widerstand ist als Plateau sichtbar. Die Stromverteilung variiert dabei sehr stark, da sich die Landschaft aus kompressiblen und inkompressiblen Bereichen stark verändert. Der quantisierte Hall-Widerstandswert bleibt erhalten, solange Elektronen nicht zwischen dem linken und rechten Randbereich gestreut werden können, d. h. die elektrochemischen Potentiale entlang gegenüberliegender Probenränder durch inkompressible Bereiche getrennt sind und deshalb konstant bleiben. Zwischen zwei Kontakten am gleichen Rand zwischen S und

D ist kein Spannungsabfall messbar und somit wird $R_{xx} = U_x/I_x = 0$ festgestellt. Dazu muss nicht das gesamte Innere der Probe inkompressibel sein, sondern es reichen schon wohl ausgeprägte inkompressible Streifen entlang der Probenränder aus, um die Streuung von Elektronen vom rechten kompressiblen Rand zum linken kompressiblen Rand zu verhindern. Die kom-

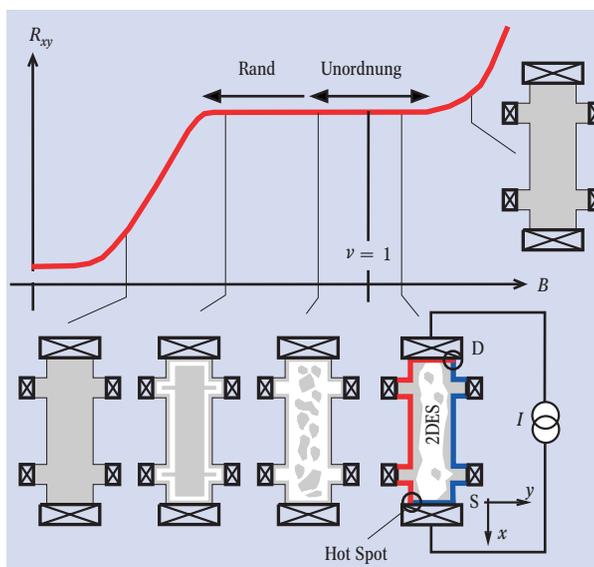


Abb. 8: Schematische Entwicklung der kompressiblen (grau) und der inneren inkompressiblen (weiß) Bereiche eines realen, damit inhomogenen 2DES über ein Quanten-Hall-Plateau hinweg. Um den ganzzahligen Füllfaktor wird das Plateau durch Unordnung/Inhomogenitäten stabilisiert, zu niedrigeren Magnetfeldern durch inkompressible Streifen am Rand.

pressiblen Bereiche werden vom Stromfluss ausgespart. Somit dehnen ausgeprägte inkompressible Streifen an den Rändern die Quanten-Hall-Plateaus zu niedrigen Magnetfeldern aus.

Die hier skizzierte Modellvorstellung macht es verständlich, weshalb die Genauigkeit der Widerstandsquantisierung beim Quanten-Hall-Effekt für reale Proben mit endlicher Abmessung und Störpotentialen auftritt. Nicht verstanden sind die genauen Mechanismen, die zu einem Zusammenbruch des QHE oberhalb eines kritischen Stroms führen. Die aktuelle Forschung auf dem Gebiet beschäftigt sich jedoch vor allem mit Elektronen-Elektronen-Korrelationen, die mit steigender Probenqualität zur Entdeckung immer weiterer inkompressibler Vielelektronen-Zustände führt und sich in Form von fraktionalem Quanten-Hall-Plateaus äußern. Phänomene wie Bose-Einstein-Kondensation, skyrmionartige Anregungen, fraktionale Ladungen, verschwindender Längswiderstand unter Mikrowellenbestrahlung, sowie streifenartige oder blasenartige Phasentexturen sind die überraschenden Entdeckungen der letzten Jahre, die zeigen, dass der Quanten-Hall-Effekt auch in der Zukunft ein aktuelles und interessantes Forschungsfeld sein wird.

Danksagung

Wir danken allen ehemaligen und derzeitigen Mitarbeitern, die dazu beigetragen haben, unser Verständnis des QHE zu vertiefen. Die hier dargestellten Ergebnisse wurden finanziell unterstützt durch das Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) sowie das Schwerpunktprogramm „Quanten-Hall-Systeme“ der Deutschen Forschungsgemeinschaft (DFG).

7) Ergänzend zu bemerken ist, dass auch vor metallischen Kontakten – obwohl niederohmig – aufgrund einer teilweisen Verarmung der Elektronendichte durch die Differenz in den Austrittsarbeiten von Metall und 2DES inkompressible Streifen zu finden sind [15]. Dies ist insofern wichtig, als im Randkanalbild den Kontakten ideale Eigenschaften zugeschrieben werden, die im hier dargestellten mikroskopischen Bild obsolet werden.

Literatur

- [1] A. B. Fowler, F. F. Fang, W. E. Howard und P. J. Stiles, Phys. Rev. Lett. **16**, 901 (1966)
- [2] T. Ando, A. Fowler und F. Stern, Rev. Mod. Phys. **54**, 437 (1982)
- [3] K. v. Klitzing, G. Dorda und M. Pepper, Phys. Rev. Lett. **45**, 494 (1980)
- [4] A. M. Thompson und D. G. Lampard, Nature **177**, 888 (1956)
- [5] T. J. Quinn, Metrologia **26**, 69 (1989)
- [6] F. Delahaye, T. J. Witt, R. E. Elmquist und R. F. Dziuba, Metrologia **37**, 173 (2000)
- [7] F. Delahaye und B. Jeckelmann, Metrologia **40**, 217 (2003)
- [8] E. R. Williams, R. L. Steiner, D. B. Nevell und P. T. Olsen, Phys. Rev. Lett. **81**, 2404 (1998)
- [9] U. Klöß, W. Dietsche, K. von Klitzing und K. Ploog, Z. Phys. B – Condensed Matter **82**, 351 (1991)
- [10] Y. Y. Wei, J. Weis, K. v. Klitzing und K. Eberl, Appl. Phys. Lett. **71**, 2514 (1997)
- [11] M. Büttiker, Phys. Rev. **B 38**, 9375 (1988)
- [12] S. Datta, Electronic Transport in Mesoscopic Systems, Cambridge University Press, Cambridge (1995)
- [13] E. Ahlswede, P. Weitz, J. Weis, K. von Klitzing und K. Eberl, Physica **B 298**, 562 (2001); Physica **E 12**, 165 (2002)
- [14] K. Lier und R. R. Gerhardts, Phys. Rev. **B 50**, 7757 (1994)
- [15] K. Güven und R. R. Gerhardts, Phys. Rev. **B 67**, 115327 (2003)
- [16] A. Siddiki und R. R. Gerhardts, Phys. Rev. **B 70**, 195335 (2004)
- [17] D. B. Chklovskii, B. I. Shklovskii und L. I. Glazman, Phys. Rev. **B 46**, 4026 (1992), angeregt durch Arbeiten an Quantenpunkt-Systemen: McEuen et al., Phys. Rev. **B 45**, 11419 (1992)
- [18] Y. Y. Wei, J. Weis, K. v. Klitzing und K. Eberl, Phys. Rev. Lett. **81** 1674 (1998); J. Weis, Y. Y. Wei und K. v. Klitzing, Physica **E 3**, 23 (1998)

Die Autoren

Klaus von Klitzing hat 1985 im Alter von 42 Jahren den Nobelpreis für Physik erhalten für die Entdeckung des Quanten-Hall-Effekts. Nach dem Studium und der Promotion in Physik an der TU Braunschweig hat er sich 1978 in Würzburg habilitiert. Nach Forschungsaufenthalten in England, Frankreich und den USA war er von 1980 bis 1984 Professor an der TU München, bevor er 1985 als Direktor an das MPI für Festkörperforschung berufen wurde.



Rolf Gerhardts hat in Köln Physik studiert, promoviert und sich 1975 auch habilitiert. Nach einem Aufenthalt in Stanford war er Professor an der FU Berlin, bevor er Anfang 1986 als wissenschaftlicher Mitarbeiter an das MPI nach Stuttgart kam. Seit 1997 ist er außerplanmäßiger Professor an der Uni Würzburg.

Jürgen Weis ist nach dem Physikstudium in Ulm nach Stuttgart gewechselt, wo er promoviert und sich – nach einem Aufenthalt bei den AT&T Bell Labs – 2002 auch habilitiert hat. Für seine Arbeiten zu Halbleiter-Quantenpunkten hat er den Rudolf-Kaiser-Preis 2004 erhalten.

